Доклады Академии Наук СССР
Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS

*МАТЕМАТИКА*

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

# НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕИЗГИБАЕМОСТИ ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

(*Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 I 1935*)

Пусть поверхность подвергается изгибанию так, что вектор, конец которого описывает поверхность, в момент времени $t$ будет

$$\mathfrak{r}(u, v; t) = \mathfrak{r}(u, v; 0) + t\,\dot{\mathfrak{r}}(u, v; 0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{\mathfrak{r}}(u, v; 0) + \dots$$

Для того чтобы длины при этом сохранялись, нужно, чтобы при $t=0$ все производные от квадрата элемента длины $d\mathfrak{r}(u, v; 0)^2$ равнялись нулю, что дает уравнения

$$d\mathfrak{r}\,d\dot{\mathfrak{r}} = 0, \tag{1}$$

$$d\mathfrak{r}\,d\ddot{\mathfrak{r}} + d\dot{\mathfrak{r}}^2 = 0 \tag{2}$$

и т. д., где

$$d\mathfrak{r} = \frac{\partial}{\partial u}\{\mathfrak{r}(u, v; 0)\}\,du + \frac{\partial}{\partial v}\{\mathfrak{r}(u, v; 0)\}\,dv$$

и $d\dot{\mathfrak{r}}$, $d\ddot{\mathfrak{r}}$ и т. д. имеют такой же смысл.

Я докажу, что на поверхности шара невозможно задать поля скоростей $\dot{\mathfrak{r}}$ и ускорений всех порядков $\ddot{\mathfrak{r}}$, $\dddot{\mathfrak{r}}$, ... (я называю эти поля изгибающими полями), которые удовлетворяли бы этим уравнениям и не являлись бы полями, дающими движение шаровой поверхности как твердого целого (полями движения).

Я буду рассматривать изгибающие поля, сохраняющие неподвижным центр тяжести поверхности. Всякое изгибающее поле можно сделать таким, присоединяя к нему некоторое поле поступательного движения поверхности. Условие (1) и условие равенства нулю скорости центра тяжести

$$\int \dot{\mathfrak{r}}\,dS = 0$$

линейны, поэтому любая линейная комбинация изгибающих полей скоростей, сохраняющих центр тяжести, будет опять изгибающим полем, сохраняющим центр тяжести.

Всякое преобразование симметрии, сохраняющее центр шара $O$, переводит его самого в себя и следовательно переводит изгибающее поле в изгибающее поле.

Пользуясь этими двумя замечаниями, я покажу, что радиальная составляющая скорости в изгибающем поле, сохраняющем центр тяжести, везде равна нулю.

Пусть на шаровой поверхности $S$ задано изгибающее поле $\dot{\mathfrak{r}}$. Возьмем на $S$ произвольную точку $A$. Отразив поле $\dot{\mathfrak{r}}$ в произвольной плоскости $P$, проходящей через $A$ и $O$, получим изгибающее поле $\dot{\mathfrak{r}}'$. Вращая $S$ вокруг оси $a$, проходящей через $A$ и $O$, будем получать изги-

бающие поля $\dot{\tau}(\varphi)$ и $\dot{\tau}'(\varphi)$, где $\varphi$ угол поворота. Возьмем в каждой точке $S$ среднее всех этих полей

$$\dot{\tau}_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\dot{\tau}(\varphi) + \dot{\tau}'(\varphi)]\,d\varphi.$$

Все вектора этого изгибающего поля будут лежать в меридиональных плоскостях, проходящих через $A$. Действительно, если перевести поворотом вокруг оси $a$ любую точку в симметричную ей относительно $P$, то в этой точке составляющие векторов $\dot{\tau}$ и $\dot{\tau}'$, касательные к параллельному кругу, будут равны по величине, но противоположны по знаку, так что при усреднении у вектора $\dot{\tau}_0$ эта составляющая оказывается равной нулю.

Вектора $\dot{\tau}_0$ во всех точках данного параллельного круга получаются один из другого вращением вокруг оси $a$. Поэтому $d\dot{\tau}_0$ при $d\tau$, направленном вдоль параллельного круга, параллелен $d\tau$, так что условие (1) выполняется только тогда, когда все вектора $\dot{\tau}_0$ параллельны $a$. А так как по условию (1) проекция $d\dot{\tau}_0$ на касательную к меридианальному кругу (в той же точке) должна равняться нулю, то все вектора $\dot{\tau}_0$ равны и параллельны оси $a$. Следовательно они дают параллельный перенос $S$, а так как центр тяжести $S$ должен оставаться на месте, то на всей поверхности шара $\dot{\tau}_0 = 0$. Но при проделанных нами операциях радиальная составляющая скорости исходного изгибающего поля в точке $A$ осталась неизменной, и следовательно она равна нулю.

Раз радиальная составляющая $\dot{\tau}$ в любой точке шаровой поверхности равна нулю, то изгибающее поле $\dot{\tau}$ переводит ее самое в себя. Отсюда уже легко заключить, что оно является полем движения.

Остается показать, что все ускорения также будут ускорениями движения шаровой поверхности. Для этого заметим, что если мы изогнули поверхность $S$, оставив ее центр тяжести $O$ на месте, то можно вращением ее вокруг $O$ добиться того, чтобы данная ее точка оказалась на том радиусе, на котором она была раньше, а данное исходящее из нее на $S$ направление оказалось в той из плоскостей, идущих через этот радиус, в которой оно лежало раньше. Таким образом мы можем ограничиться изгибаниями, оставляющими центр тяжести на месте, данную точку поверхности на ее радиусе, а исходящее из нее на поверхности направление в его меридиональной плоскости. При этих условиях движения невозможны, т. е. $\dot{\tau} = 0$ и $\ddot{\tau}$ удовлетворяет уравнению $d\tau\, d\ddot{\tau} = 0$, так что мы можем применить наши предыдущие рассуждения к полю ускорений и показать, что оно есть поле ускорений движения, а значит при наших условиях и $\ddot{\tau} = 0$. Точно так же получим $\dddot{\tau} = 0$ и т. д.

Таким образом, присоединяя к изгибанию некоторое движение, мы получили покой. Следовательно, всякое изгибание является движением.

Метод, которым мы пользовались, без труда распространяется на шаровую поверхность любого числа измерений $n \geqslant 3$, если воспользоваться математической индукцией. Проведем через центр $n$-мерного шара $(n-2)$-мерную гиперплоскость $P_{n-2}$. Отразив данное изгибающее поле $\dot{\tau}$ в $(n-1)$-мерной гиперплоскости, проходящей через $P_{n-1}$, получим поле $\dot{\tau}'$, и вращая шар вокруг $P_{n-2}$ и беря в каждой точке среднее всех полученных полей, получим как и прежде поле, вектора которого будут лежать в $(n-1)$-мерных меридиональных гиперплоскостях и переходить друг в друга при вращениях вокруг $P_{n-2}$. Поэтому, сечения данной ша-

ровой поверхности $S_{n-1}$ $(n-1)$-мерными меридиональными гиперплоскостями, являющиеся $(n-2)$-мерными шаровыми поверхностями $S_{n-2}$, будут претерпевать одинаковые изгибания, а значит движения, в этих гиперплоскостях. Как и прежде вектора усредненного поля параллельны $P_{n-2}$, и следовательно, если бы наши $S_{n-2}$ подвергались параллельному переносу, а не только повороту, то и $S_{n-1}$ претерпевала бы перенос, что противоречит неподвижности центра тяжести. Отсюда следует, что радиальная составляющая $\dot{\mathfrak{r}}$ на сечении $S_{n-1}$ $P_{n-2}$, а значит и везде, равна нулю.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного
университета.

Поступило
5 I 1935.

---

*MATHEMATICS*

## A NEW PROOF OF THE NON-FLEXIBILITY OF THE SPHERE

By A. ALEXANDROV

(*Communicated by I. Vinogradow, Member of the Academy, 5. I. 1935*)

Let a surface be deforming in such a way that at a given moment $t$ the vector whose end curcumscribes this surface is

$$\mathfrak{r}(u, v; t) = \mathfrak{r}(u, v; 0) + t\dot{\mathfrak{r}}(u, v; 0) + \frac{1}{2}t^2\ddot{\mathfrak{r}}(u, v; 0) + \dots$$

In order not to change the lengths of the curves on this surface, it is necessery that at $t=0$ all the derivatives of the square of the line element $d\mathfrak{r}(u, v; 0)^2$ should vanish. Hence the equations

$$d\mathfrak{r}\, d\dot{\mathfrak{r}} = 0, \tag{1}$$

$$d\mathfrak{r}\, d\ddot{\mathfrak{r}} + d\dot{\mathfrak{r}}^2 = 0, \tag{2}$$

and so on, where

$$d\mathfrak{r} = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial v}\, dv$$

and $d\dot{\mathfrak{r}}$, $d\ddot{\mathfrak{r}}$, ... have the same meaning.

I shall prove that the only fields of the velocities $\dot{\mathfrak{r}}$ and the accelerations of all orders $\ddot{\mathfrak{r}}$, $\dddot{\mathfrak{r}}$, ..., which satisfy these equations (I call them „the fields of flexion“) on the whole sphere, are the fields corresponding to a movement of the sphere as a hard body („the fields of movement“).

Each field of flexion is susceptible of being changed into one conserving the position of the gravity centre of the surface, by adding to this field a corresponding field of translation. Therefore, I am going to consider only these fields.

The condition (1) and the condition that the velocity of the gravity centre is equal to zero are linear ones. Thus, any linear combination of the fields of the velocities of flexion conserving the gravity centre will be again a field of flexion conserving the gravity centre.

Each symmetrical transformation conserving the centre of the sphere converts the sphere into itself and hence converts the given field of flexion into another.

With the help of these two remarks I shall show that the radial component of the velocity in the field of flexion conserving the gravity centre $O$ is everywhere equal to zero.

Let $\dot{\tau}$ be a bending field on the sphere $S$. Let us take on $S$ an arbitrary point $A$. Reflecting the field $\dot{\tau}$ in the arbitrary plane $P$ passing through $A$ and $O$, we get the field of flexion $\dot{\tau}'$. Rotating $S$ around the axis $a$ passing through $A$ and $O$, we shall get the fields of flexion $\dot{\tau}(\varphi)$ and $\dot{\tau}'(\varphi)$, where $\varphi$ is the angle of rotation. Let us take at each point of $S$ the average value of all these fields

$$\dot{\tau}_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \{\dot{\tau}(\varphi) + \dot{\tau}'(\varphi)\}\, d\varphi.$$

All the vectors of this field of flexion will lie in the meridian planes passing through $A$. This will be evident if we transfer by rotation around $a$ an arbitrary point $S$ into a symmetrical one relative to $P$. Then at this point the components of $\dot{\tau}$ and $\dot{\tau}'$ on the tangent to the parallel circle will have equal alsolute values and opposite signs. Hence, by taking the average value, this component becomes equal to zero.

In all the points of the given parallel circle the vectors $\dot{\tau}_0$ go over into one another through the rotation around the axis $a$. Therefore, $d\dot{\tau}_0$ is parallel to $dr$, when $dr$ has the direction of the tangent to the parallel circle. Thus, condition (1) can be satisfied if and only if all the vectors $\dot{\tau}_0$ are parallel to $a$. Besides, this conditions shows that the projection of $d\dot{\tau}_0$ on the tangent to the meridian circle (at the same point) must be equal to zero, which is possible if and only if all the vectors $\dot{\tau}_0$ be equal to one another. Hence, they give the translation of $S$, which is impossible, because the gravity centre of $S$ must conserve its position.

But in the course of all our operations the radial component of the velocity of the original bending field did not change in the point $A$, and hence it was equal to zero.

Since the radial component of $\dot{\tau}$ vanishes at any point of the sphere, the field of flexion $\dot{\tau}$ transfers the sphere into itself. Now it is not difficult to prove that this field of flexion is a field of movement.

Now we have to prove that all the accelerations will be the accelerations of movement too. For this purpose we note that after having flexed the surface $S$ so that the position of its gravity centre $O$ is conserved, it is possible, through rotating it around $O$, to get such a position of $S$ that its given point $A$ might return to the radius on which it lay earlier, and a given direction drawn on $S$ from $A$ might return in the plane in which it lay earlier and which passes through the above radius. Therefore, we may flex the sphere only in such a way that, 1° the gravity centre conserves its position, 2° a given point $A$ of the sphere does not leave the radius passing through it, and 3° a given direction drawn on the sphere from $A$ does not leave the plane passing through it and the above-mentioned radius. Under such conditions, the movement becomes impossible, and therefore $\dot{\tau} = 0$ and $\ddot{\tau}$ must satisfy the equation $dr\, d\ddot{\tau} = 0$. Thus, we may apply to it all our reasonings and show that, under our conditions, it must be equal to zero. So we get further $\dddot{\tau} = 0$, and so on. We see that in adding to arbitrary fields of flexion the corresponding fields of movement we get no movement at all. Hence, each field of flexion is a field of movement.

Should we use mathematical induction, our method might be applied, without any difficulties, to a sphere of the arbitrary dimension $n \geqslant 3$.

Mathematical Institute
of the Leningrad State University.

Received
5. I. 1935.

Б. З. ВУЛИХ

# НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком С. Н. Бернштейном 29 XI 1934*)

В § 1 настоящей заметки даются некоторые достаточные условия для того, чтобы предел (обыкновенный, наибольший или наименьший) последовательности функций определенного типа (по классификации Юнга) был функцией того же типа.

В § 2 даются условия необходимые и достаточные для того, чтобы повышение типа функции при предельном переходе было меньшим, чем в общем случае.

Будем употреблять для типа множеств Бореля и типа функций обозначения Хана (1).

§ 1. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, определенных на замкнутом интервале $I$, предельная (обыкновенная или в обобщенном смысле) функция которой $f(x)$ имеет в каждой точке конечное значение.

Для краткости будем употреблять выражение: „декомпозиция интервала $I$ типа $(\mathfrak{B}_\alpha)$ со знаком $<$ (соответственно со знаком $>$ или со знаком $|\ |$)“, понимая под этим следующее: существуют две последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$ и $\{N_k\}$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0 \quad \text{и} \quad \lim_{k\to\infty}N_k=\infty,$$

и существуют при каждом $k$ множества $E_l^{(k)}$ типа не выше $(\mathfrak{B}_\alpha)$ и числа $n_l^{(k)}>N_k$ такие, что

$$I=\sum_{l=1}^{\infty}E_l^{(k)}$$

и что неравенства

$$f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)<\varepsilon_k$$

(соответственно $f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)>-\varepsilon_k$ или $|f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)|<\varepsilon_k$) выполняются при каждом $x\in E_l^{(k)}$.

Будем говорить, кроме того, что декомпозиция со знаком $<$ или со знаком $>$ обладает свойством $(L)$, если для каждого $k$ в каждой точке $x$ при некотором $l$ таком, что $x\in E_l^{(k)}$, выполняется неравенство

$$|f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)|<\varepsilon_k.$$

Декомпозиция со знаком $|\ |$ всегда обладает свойством $(L)$*

Теорема 1. *Если* $f(x)=\limsup_{n\to\infty}f_n(x)$ (или $f(x)=\liminf_{n\to\infty}f_n(x)$), *где* $f_n(x)$ *суть функции типа не выше* $(g_\alpha)$, *то для того, чтобы* $f(x)$ *была функцией типа не выше* $(g_\alpha)$, *достаточна декомпозиция интервала* $I$ *типа* $(\mathfrak{B}_\alpha)$ *со знаком* $<$.

* Если декомпозиция обладает свойством $(L)$, то можно отбросить условие $\lim_{k\to\infty}N_k=\infty$.

Доказательство. Положим

$$f'_{n_l^{(k)}}(x)=\begin{cases} f_{n_l^{(k)}}(x)+\varepsilon_k & \text{в } E_l^{(k)} \\ +\infty & \text{в } CE_l^{(k)} \end{cases}$$

Легко проверить, что $f'_{n_l^{(k)}}(x)$ будут функциями типа не выше $(g_\alpha)$, установив напр., что $E(f'_{n_l^{(k)}}<a)$ — типа не выше $(\mathfrak{B}_\alpha)$ (1).

Очевидно

$$f'_{n_l^{(k)}}(x)\geqslant f(x).$$

Покажем, что $f(x)=\inf\limits_{1\leqslant k,\, l<\infty}\left\{f'_{n_l^{(k)}}(x)\right\}$, (1)

откуда непосредственно будет следовать, что $f(x)$ — функция типа не выше $(g_\alpha)$. Действительно, в каждой фиксированной точке $x$ имеет место неравенство

$$f(x)-f_n(x)>-\frac{\eta}{2} \qquad (n>N) \qquad (2)$$

Следовательно, если $k$ выбрано так, что $N_k>N$ и $\varepsilon_k<\frac{\eta}{2}$, то при некотором $l$

$$|f(x)-f'_{n_l^{(k)}}(x)|<\eta;$$

так как $\eta$ произвольно мало, то отсюда следует (1).

Замечание. Из условия декомпозиции типа $(\mathfrak{B}_1)$ со знаком $<$ (по теореме Гейне-Бореля) следует quasi-равномерная снизу сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$, т. е.: каковы бы ни были $N$ и $\varepsilon>0$, существует $P>N$ такое, что неравенство

$$f(x)-f_n(x)<\varepsilon$$

выполняется во всех точках интервала $I$ при $n$, зависящем от $x$, но заключенном в пределах $N<n<P$.

Можно доказать общее предложение: если

$$f(x)=\limsup_{n\to\infty} f_n(x) \quad (\text{или } f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)),$$

то условие quasi-равномерной снизу сходимости достаточно для того, чтобы $f(x)$ была функцией типа не выше $(g_\alpha)$, когда $f_n(x)$ суть функции такого же типа.

Для доказательства достаточно представить $f(x)$ в виде

$$f(x)=\lim_{N\to\infty} F_N(x),$$

где

$$F_N(x)=\max_{N<n<P}\{f_n(x)\}+\varepsilon_N\geqslant f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{N\to\infty}\varepsilon_N=0.$$

Теорема 2. *Если $f(x)=\liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ суть функции типа не выше $(g_\alpha)$, то для того, чтобы $f(x)$ была функцией типа не выше $(g_\alpha)$, достаточна декомпозиция типа $(\mathfrak{B}_\alpha)$ со знаком $<$, обладающая свойством $(L)$.**

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, только лишь вместо неравенства (2) мы используем неравенство

$$|f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)|<\frac{\eta}{2},$$

вытекающее из условия $(L)$ при $\varepsilon_k<\frac{\eta}{2}$.

§ 2. Теорема 3. *Если $f(x)=\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (или $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ суть функции типа не выше $(g_\alpha)$ и $(G_\alpha)$ одновременно, то для того,*

* Здесь, как и ниже, свойство $(L)$ существенно.

*чтобы $f(x)$ была функцией типа не выше $(g_\alpha)$, необходима и достаточна декомпозиция типа $(\mathfrak{B}_\alpha)$ со знаком $<$.*

Доказательство. Если $f(x)$ — типа не выше $(g_\alpha)$, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, множества

$$E_n = \mathcal{E}(f(x) - f_n(x) < \varepsilon)$$

типа не выше $(\mathfrak{B}_\alpha)$ и

$$I = \sum_{n=N}^{\infty} E_n$$

при всяком $N$. Следовательно, указанная декомпозиция необходима.

Достаточность следует из теоремы 1.

Замечание. Принимая во внимание теорему Гейне-Бореля и замечание к теореме 1, имеем: quasi-равномерная снизу сходимость последовательности непрерывных функций необходима и достаточна для того, чтобы предельная функция (обыкновенная или наибольшая) была полунепрерывной сверху.

Следующие теоремы доказываются аналогично теоремам 1—3.

Теорема 4. *Если* $f(x) = \lim\sup_{n\to\infty} f_n(x)$ (или $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$), *где* $f_n(x)$ *суть функции типа не выше* $(g_\alpha)$, *то для того, чтобы* $f(x)$ *была функцией типа не выше* $(g_{\alpha+1})$, *необходима и достаточна декомпозиция типа* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *со знаком* $<$.

Следствие. Если $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ суть функции типа не выше $(g_\alpha)$, то для того, чтобы $f(x)$ была функцией типа не выше $(g_{\alpha+1})$ и $(G_{\alpha+1})$ одновременно, необходима и достаточна декомпозиция типа $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ со знаком $<$.

Действительно, если $f_n(x)$ — функции типа не выше $(g_\alpha)$, то $f(x)$ всегда функция типа не выше $(G_{\alpha+1})$.

Теорема 5. *Если* $f(x) = \lim\sup_{n\to\infty} f_n(x)$, *где* $f_n(x)$ *суть функции типа не выше* $(g_\alpha)$, *то для того, чтобы* $f(x)$ *была функцией типа не выше* $(G_{\alpha+1})$, *необходима и достаточна декомпозиция типа* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *со знаком* $>$, *обладающая свойством* $(L)$.

Для доказательства достаточности нужно положить:

$$f'_{n_l^{(k)}}(x) = \begin{cases} f_{n_l^{(k)}}(x) - \varepsilon_k & \text{в } E_l^{(k)} \\ -\infty & \text{в } CE_l^{(k)} \end{cases}$$

Теорема 6. (следствие из теорем 4—5). *Если* $f(x) = \lim\sup_{n\to\infty} f_n(x)$, *где* $f_n(x)$ *суть функции типа не выше* $(g_\alpha)$, *то для того, чтобы* $f(x)$ *была функцией типа не выше* $(g_{\alpha+1})$ *и* $(G_{\alpha+1})$ *одновременно, необходима и достаточна декомпозиция типа* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *со знаком* $|\ |$.

Теорема 7. *Если* $f(x) = \lim\inf_{n\to\infty} f_n(x)$, *где* $f_n(x)$ *суть функции типа не выше* $(g_\alpha)$ *и* $(G_\alpha)$ *одновременно, то для того, чтобы* $f(x)$ *была функцией типа не выше* $(g_\alpha)$, *необходима и достаточна декомпозиция типа* $(\mathfrak{B}_\alpha)$ *со знаком* $<$, *обладающая свойством* $(L)$.

Теорема 8. *Если* $f(x) = \lim\inf_{n\to\infty} f_n(x)$, *где* $f_n(x)$ *суть функции типа не выше* $(g_\alpha)$, *то для того, чтобы* $f(x)$ *была функцией типа не выше* $(g_{\alpha+1})$ *и* $(G_{\alpha+1})$ *одновременно, необходима и достаточна декомпозиция типа* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *со знаком* $<$, *обладающая свойством* $(L)$.

Замечание. Из теорем 3 и 7 следует теорема Б. М. Гагаева (2) в несколько обобщенной формулировке: если

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

$$(\text{или } f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) \quad \text{или} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\inf f_n(x)),$$

где $f_n(x)$ суть функции $\alpha$-го класса (Бэра), то для того, чтобы $f(x)$ была функцией того же класса, необходима и достаточна декомпозиция типа $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ со знаком $|\ |$.

Кроме того, из теорем 6 и 8 вытекает: если

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) \quad (\text{или} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\inf f_n(x)),$$

где $f_n(x)$ суть функции $\alpha$-го класса (Бэра), то для того, чтобы $f(x)$ была функцией $(\alpha+1)$-го класса, необходима и достаточна декомпозиция типа $(\mathfrak{B}_{\alpha+2})$ со знаком $|\ |$.

В заключение считаю своим приятным долгом принести благодарность проф. Л. В. Канторовичу за его ценные указания.

Институт математики и механики
Ленинградского государственного университета.

Поступило
29 XI 1934.

---

*MATHÉMATIQUES*

## QUELQUES THÉORÈMES SUR LES SUITES DE FONCTIONS DISCONTINUES

**Par B. VULICH**

*(Présenté par S. Bernstein, de l'Académie, le 29. XI. 1934)*

Dans le § 1 de la présente note nous donnons quelques conditions suffisantes pour que la fonction limite (simple, supérieure ou inférieure) d'une suite de fonctions d'un certain type (en suivant la classification de M. W. H. Young) soit une fonction du même type.

Dans le § 2 nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'élévation du type de la fonction lors du passage à la limite soit moins grande que dans le cas général.

Pour les notations du type d'ensembles et de fonctions, nous suivrons M. H. Hahn (1).

§ 1. Soit donnée une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ définies dans l'intervalle fermé $I$, dont la fonction limite (simple ou dans le sens généralisé) $f(x)$ est finie pour chaque valeur de $x$.

Pour être brefs nous emploierons l'expression suivante: „la décomposition de l'intervalle $I$ du type $(\mathfrak{B}_\alpha)$ avec le signe $<$ (resp. avec le signe $>$ ou avec le signe $|\ |$)“, qui signifie: il existe deux suites de nombres positifs $\{\varepsilon_k\}$ et $\{N_k\}$ telles, que

$$\lim_{k\to\infty}\varepsilon_k=0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty}N_k=\infty,$$

et il existe pour tout $k$ les ensembles $E_l^{(k)}$ du type $(\mathfrak{B}_\alpha)$ au plus et les nombres $n_l^{(k)}>N_k$ tels, que

$$I=\sum_{l=1}^{\infty}E_l^{(k)}$$

et que l'inégalité

$$f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)<\varepsilon_k$$

$$(\text{resp. } f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)>-\varepsilon_k \quad \text{ou} \quad |f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)|<\varepsilon_k)$$

est vérifiée pour tous $x\in E_l^{(k)}$.

Outre ceci nous dirons que la décomposition avec le signe $<$ (ou avec le signe $>$) jouit de la propriété $(L)$, si pour tout $k$ et pour tout $x$ l'inégalité

$$|f(x)-f_{n_l^{(k)}}(x)|<\varepsilon_k.$$

est vérifiée pour un certain $l$ tel que $x \in E_l^{(k)}$.

La décomposition avec le signe $|\ |$ jouit toujours de cette propriété.*

Théorème 1. *Pour que la fonction $f(x)$, où*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) \quad (\text{ou} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)),$$

*soit $(g_\alpha)$ au plus, $f_n(x)$ étant des fonctions $(g_\alpha)$ au plus, il suffit que la décomposition de l'intervalle $I$ du type $(\mathfrak{B}_\alpha)$ avec le signe $<$ ait lieu.*

Démonstration. Posons

$$f'_{n_l^{(k)}}(x)=\begin{cases} f_{n_l^{(k)}}(x)+\varepsilon_k & \text{dans } E_l^{(k)} \\ +\infty & \text{dans } CE_l^{(k)} \end{cases}$$

Il est aisé de vérifier que les fonctions $f'_{n_l^{(k)}}(x)$ sont $(g_\alpha)$ au plus, en établissant par exemple, que l'ensemble $E(f'_{n_l^{(k)}}<a)$ est $(\mathfrak{B}_\alpha)$ au plus (1).

Évidemment $$f'_{n_l^{(k)}}(x)\geqslant f(x).$$

Nous montrerons que $$f(x)=\inf_{1\leqslant k,\, l<\infty}\left\{f'_{n_l^{(k)}}(x)\right\}, \tag{1}$$

d'où il suivra immédiatement que la fonction $f(x)$ est $(g_\alpha)$ au plus. En effet, pour chaque valeur fixée de $x$, à partir d'un certain $n$, la relation

$$f(x)-f_n(x)>-\frac{\eta}{2} \qquad (n>N) \tag{2}$$

est vérifiée. Par conséquent, si $k$ est tel, que l'on a $N_k>N$ et $\varepsilon_k<\frac{\eta}{2}$, l'inégalité

$$|f(x)-f'_{n_l^{(k)}}(x)|<\eta$$

est vérifiée pour un certain $l$. Ceci posé, $\eta$ étant arbitrairement petit, il s'ensuit la relation (1), c. q. f. d.

Remarque. De la décomposition du type $(\mathfrak{B}_1)$ avec le signe $<$ dérive (d'après le théorème de Heine-Borel) la convergence quasi-uniforme inférieurement de la suite $f_n(x)$ vers la fonction $f(x)$, c. à. d. quels que soient les nombres $N>0$, $\varepsilon>0$, il existe un nombre $P>N$ tel, que l'inégalité

$$f(x)-f_n(x)<\varepsilon$$

est vérifiée dans tous les points de l'intervalle $I$ pour $n$ dépendant de $x$ mais renfermé dans les bornes $N<n<P$.

On peut démontrer une proposition générale: si la convergence de la suite $\{f_n(x)\}$ vers la fonction $f(x)$, où

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) \quad (\text{ou} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)),$$

est quasi-uniforme inférieurement, les fonctions $f_n(x)$ étant $(g_\alpha)$ au plus, $f(x)$ est $(g_\alpha)$ au plus. Pour la démonstration il suffit de présenter $f(x)$ comme

$$f(x)=\lim_{N\to\infty} F_N(x),$$

où $$F_N(x)=\max_{N<n<P}\{f_n(x)\}+\varepsilon_N\geqslant f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{N\to\infty}\varepsilon_N=0.$$

* Si la décomposition jouit de la propriété $(L)$, on peut négliger la condition

$$\lim_{k\to\infty} N_k=\infty$$

Théorème 2. *Pour que la fonction* $f(x)$, *où* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\inf f_n(x)$ *soit* $(g_\alpha)$ *au plus,* $f_n(x)$ *étant des fonctions* $(g_\alpha)$ *au plus, il suffit que la décomposition du type* $(\mathfrak{B}_\alpha)$ *avec le signe* $<$, *jouissant de la propriété* $(L)$, *ait lieu.**

§ 2. Théorème 3. *Pour que la fonction* $f(x)$, *où*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) \quad (\text{ou} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)),$$

*soit* $(g_\alpha)$ *au plus,* $_n f(x)$ *étant des fonctions* $(g_\alpha)$ *et* $(G_\alpha)$ *au plus simultanément, il faut et il suffit que la décomposition du type* $(\mathfrak{B}_\alpha)$ *avec le signe* $<$ *ait lieu.*

Remarque. Prenant en considération le théorème de Heine-Borel et la remarque sur le théorème 1 nous avons la proposition suivante: la convergence quasi-uniforme inférieurement de la suite de fonctions continues est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction limite (simple ou supérieure) soit semi-continue supérieurement. De même que les théorèmes 1—3, on peut démontrer les théorèmes suivants.

Théorème 4. *Pour que la fonction* $f(x)$, *où*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) \quad (\text{ou} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)),$$

*soit* $(g_{\alpha+1})$ *au plus,* $f_n(x)$ *étant des fonctions* $(g_\alpha)$ *au plus, il faut et il suffit que la décomposition du type* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *avec le signe* $<$ *ait lieu.*

Corollaire. Pour que la fonction $f(x)$, où $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, soit $(g_{\alpha+1})$ et $(G_{\alpha+1})$ au plus simultanément, $f_n(x)$ étant des fonctions $(g_\alpha)$ au plus, il faut et il suffit que la décomposition du type $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ avec le signe $<$ ait lieu.

En effet, si les fonctions $f_n(x)$ sont $(g_\alpha)$ au plus, la fonction $f(x)$ est toujours $(G_{\alpha+1})$ au plus.

Théorème 5. *Pour que la fonction* $f(x)$, *où* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sup f_n(x)$, *soit* $(G_{\alpha+1})$ *au plus,* $f_n(x)$ *étant* $(g_\alpha)$ *au plus, il faut et il suffit que la décomposition du type* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *avec le signe* $>$, *jouissant de la propriété* $(L)$, *ait lieu.*

Théorème 6. (*suit des th. 4 et 5*). *Pour que la fonction* $f(x)$, *où*

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x),$$

*soit* $(g_{\alpha+1})$ *et* $(G_{\alpha+1})$ *au plus simultanément,* $f_n(x)$ *étant* $(g_\alpha)$ *au plus, il faut et il suffit que la décomposition du type* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *avec le signe* $|\ \ |$ *ait lieu.*

Théorème 7. *Pour que la fonction* $f(x)$, *où* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\inf f_n(x)$, *soit* $(g_\alpha)$ *au plus,* $f_n(x)$ *étant* $(g_\alpha)$ *et* $(G_\alpha)$ *au plus simultanément, il faut et il suffit que la décomposition du type* $(\mathfrak{B}_\alpha)$ *avec le signe* $<$, *jouissant de la propriété* $(L)$, *ait lieu.*

Théorème 8. *Pour que la fonction* $f(x)$, *où* $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\inf f_n(x)$, *soit* $(g_{\alpha+1})$ *et* $(G_{\alpha+1})$ *au plus simultanément,* $f_n(x)$ *étant* $(g_\alpha)$ *au plus, il faut et il suffit que la décomposition du type* $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ *avec le signe* $<$, *jouissant de la propriété* $(L)$, *ait lieu.*

Remarque. On peut tirer des théorèmes 8 et 7 le théorème de B. Gagaeff[2] un peu généralisé:

Pour que la fonction $f(x)$, où $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

$$(\text{ou} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\sup f_n(x) \quad \text{ou} \quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\inf f_n(x)),$$

* La condition de la propriété $(L)$ est très essentielle.

soit une fonction de classe $\alpha$ (suivant la classification de M. R. Baire), $f_n(x)$ étant des fonctions de classe $\alpha$, il faut et il suffit que la décomposition du type $(\mathfrak{B}_{\alpha+1})$ avec le signe $|\ |$ ait lieu.

Outre ceci, il suit des théorèmes 6 et 8 la proposition suivante:

Pour que la fonction $f(x)$, où $f(x) = \lim\sup_{n\to\infty} f_n(x)$ (ou $f(x) = \lim\inf_{n\to\infty} f_n(x)$), soit une fonction de classe $(\alpha+1)$, $f_n(x)$ étant des fonctions de classe $\alpha$, il faut et il suffit que la décomposition du type $(\mathfrak{B}_{\alpha+2})$ avec le signe $|\ |$ ait lieu.

Je profite de l'occasion pour exprimer ma reconnaissance au prof L. Kantorovitch pour m'avoir guidé dans mon travail.

Institut de Mathématiques et
de Mécanique de l'Université de
Leningrad.

Manuscrit reçu
le 29. XI. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITTÉRATURE CITÉE

[1] H. Hahn. Theorie der reellen Funktionen. Berlin, 1921, SS. 334, 328; 348.
[2] B. Gagaeff. Fund. Math., t. XVIII, p. 182.

---

*ФИЗИКА*

Б. М. ВУЛ и И. М. ГОЛЬДМАН

## ПРОБОЙ ПРИ ВНУТРЕННЕМ ФОТОЭФФЕКТЕ

*(Представлено академиком С. И. Вавиловым 25 XII 1934)*

Исследование было произведено на окрашенных кристаллах каменной соли. Предварительной обработкой в кристаллах создавалась так наз. *U*-полоса поглощения. Последующее освещение ультрафиолетом создавало в кристаллах интенсивную атомарную окраску ([1, 2]). Чтобы исключить влияние внешней среды на величину пробивных напряжений и получить надежные значения для подсчета пробивной напряженности электрического поля в кристаллах, необходимо было произвести исследование в однородном поле. Это было достигнуто соответствующим выбором электродов. В кристаллах высотой около 10 мм высверливалось углубление, диаметром 5 мм, заканчивающееся полусферой. Толщина донышка в наиболее тонком месте оставлялась около 50 $\mu$. Наливаемый в углубление спирт служил одним электродом, другим — фольга, прикатываемая к нижней полированной поверхности кристалла. Для устранения непосредственного нагрева, освещение кристаллов производилось через водяной фильтр. Источником света служила вольтова дуга.

Исследование было проведено на постоянном напряжении, переменном 50 герц и ударном. Длительность импульсов была 0.02 сек. Для каждого рода напряжений испытывалось около 20 отдельных кристаллов, половина которых пробивалась при освещении, а другая — в темноте. Результаты измерений сведены в таблице, в которой даны величины средней пробивной напряженности, определяемой как отношение пробивного напряжения к толщине кристалла в наиболее тонком месте, где поле весьма близко к однородному. Приведенные величины представляют средние значения.

| Род напряжения<br>Spannung | Средняя пробивная напряженность<br>Mittlere Durchschlagsfeldstärke | |
|---|---|---|
| | В темноте<br>Unbelichtet | При освещении<br>Belichtet |
| Постоянное — Gleichspannung . . . . . | $2.1 \cdot 10^6$ V/cm | $0.83 \cdot 10^6$ V/cm |
| Переменное 50 герц — Wechselsp. 50 H. . . . | $1.8 \cdot 10^6$ | $0.84 \cdot 10$ |
| Ударное $t = 0.02$ сек. — Stossspannung $t = 0.02$ sec. | $1.9 \cdot 10^6$ | $1.9 \cdot 10$ |

Как известно, время установки первичного фототока значительно меньше длительности применяемых нами импульсов. Независимость пробивных напряжений на импульсах от освещения указывает на то, что первичный фототок, или наличие большого числа электронов в полосе проводимости кристалла, заметной роли при электрическом пробое не играет.

Снижение пробивных напряжений при освещении на постоянном и переменном токе объясняется, очевидно, вторичными явлениями, вызываемыми фототоком. Наиболее вероятными могут быть нагрев кристалла остаточным фототоком и искажение электрического поля в кристалле объемными зарядами ([3]).

Постепенный разогрев кристалла должен сопровождаться постепенным ростом проводимости. Измеряя ток, текущий через освещенный кристалл, мы в отдельных случаях наблюдали возрастание вторичного тока со временем. Рост тока наступал при разности потенциалов близкой к половине темнового пробивного напряжения. Перед пробоем ток достигал значений, во много тысяч раз превышающих остаточный фототок. Несомненно, что пробой в этих кристаллах имел тепловой характер.

Однако в большинстве случаев в освещенных кристаллах пробой наступал внезапно, без предварительного роста проводимости и тепловой подготовки. Очевидно, что понижение пробивных напряжений происходило в большинстве случаев из-за искажения электрического поля в кристалле объемными зарядами, образующимися при фототоке ([4]). Считая положительный объемный заряд равномерно распределенным по кристаллу с плотностью достаточной, чтобы компенсировать приложенную извне разность потенциалов, можно найти, что максимальная напряженность поля в 2 раза выше средней. Можно полагать, что в освещенных кристаллах до пробоя мы имеем весьма близкие к данным условия. Тогда, чтобы перейти от средней напряженности к максимальной, определяющей пробой, необходимо приведенные в таблице величины для освещенных кристаллов на постоянном и переменном напряжениях увеличить в 2 раза. Получающиеся при этом значения довольно близки к соответствующим величинам, полученным в темноте.

На импульсах не успевает происходить ни достаточного выделения тепла, ни образования достаточного объемного заряда, чем объясняется равенство пробивных напряжений при освещении и в темноте.

Физический институт им. П. Н. Лебедева.
Академия Наук СССР. Москва.

Поступило
25.XII.1934.

---

*PHYSIK*

## ÜBER DEN EINFLUSS DES PHOTOELEKTRISCHEN STROMES AUF DIE DURCHSCHLAGSPANNUNG

**Von I. GOLDMAN und B. WUL**

(*Vorgelegt von S. Wawilow, Mitglied der Akademie, d. 25.XII.1934*)

Die Durchschlagspannung verfärbter Steinsalzkristalle wurde untersucht. Die atomare Verfärbung wurde in bekannter Weise ([1, 2]) durch additive Verfärbung, nachfolgende Entfärbung und Ultraviolett-Bestrahlung erzielt.

Besondere Sorgfalt wurde der Erzielung eines homogenen Feldes beim Durchschlagsversuch zugewendet, was durch geeignete Formgebung des Kristallmaterials erzielt wurde. Die wirksame Dicke der angebohrten Kristallblöcke betrug zirka 50 μ; als Beleuchtungsquelle diente eine Bogenlampe mit Wasserfilter.

Es wurden je 20 Kristalle bei Gleich-, Wechsel- und Stoss-Spannung durchgeschlagen, wobei bei jeder Spannungsart die Hälfte der Kristalle unter Beleuchtung, die andere Hälfte ohne Beleuchtung untersucht wurde.

Die erhaltenen Durchschnittswerte für die mittlere Durchschlagsfeldstärke sind in der Tabelle angeführt (s. S. 363).

Wie bekannt, setzt der photoelektrische Strom in viel kürzerer Zeit ein, als die von uns verwendete Stossdauer betrug. Die Unabhängigkeit der Stossdurchschlagspannung von der Beleuchtung zeigt demnach, dass der primäre photoelektrische Strom, das heisst das Vorhandensein einer grossen Anzahl von Elektronen in der Leitfähigkeitszone des Kristalls keinen Einfluss auf den Vorgang des elektrischen Durchschlags hat.

Die Verminderung der Durchschlagspannung des beleuchteten Kristalls bei Gleich- und Wechselspannung muss offenbar mit Sekundärerscheinungen zusammenhängen, die durch den photoelektrischen Strom hervorgerufen werden. Die wahrscheinlichste Erklärung dürfte Erwärmung durch den sekundären photoelektrischen Strom oder aber Feldverzerrung durch Raumladungen sein ([3]).

Die allmähliche Erwärmung des Kristalls muss von einem entsprechenden Leitfähigkeitsanstieg begleitet sein. Bei Messung des Stromes in belichteten Kristallen beobachteten wir in einzelnen Fällen eine Stromverstärkung mit der Zeit. Der Stromanstieg begann bei einer Spannung nahe der Hälfte der Durchschlagss-Spannung des unbelichteten Kristalles. Unmittelbar vor dem Durchschlag war der Strom einige tausendmal grösser als der Reststrom. Ohne Zweifel ist der Durchschlag in diesen Fällen ein Wärmedurchschlag. Aber meistens trat der Durchschlag im belichteten Kristall plötzlich ein, ohne Anzeichen eines Wärmedurchschlags. In diesen Falle muss die Erniedrigung der Durchschlagspannung auf eine Feldverzerrung im Kristall zurückgeführt werden, welche ihrerseits durch Raumladungen verursacht ist, die beim photoelektrischen Strom auftreten ([4]). Wenn man annimmt dass die Raumladung gleichmässig im Kristall mit einer solchen Dichte verteilt ist, die genügt um die angelegte Spannung zu kompensieren, kann man zeigen, dass dann die maximale Feldstärke doppelt so gross ist wie die mittlere. Man kann annehmen, dass wir unmittelbar vor dem Durchschlag im belichteten Kristall Verhältnisse haben, die ganz ähnlich den hier beschriebenen sind. In diesem Fall, wenn wir von mittleren Feld stärken zu maximalen, — die in Wirklichkeit den Durchschlag bestimmen — übergehen, muss man die Zahlenangaben für den beleuchteten Kristall in Tabelle bei Gleich- und Wechselspannung verdoppeln. Die auf diese Weise erhaltenen Zahlenwerte sind ziemlich nahe den entsprechenden Werten für den Durchschlag des unbeleuchteten Kristalls. Bei Stoss-Spannung kann sich weder eine genügende Wärmemenge noch eine Raumladung entwikkeln, wodurch die Gleichheit der Durchschlagspannung des belichteten und unbelichteten Kristalls bei Stoss-Spannung erklärt wird.

Lebedewsches physikalisches Institut.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
d. 25.XII.1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] R. Hilsch und Pohl. Nachr. Ges. Wiss. Gött., math.-phys. Kl., 1933, H. 3. [2] Арцимович. ДАН СССР, 1933, т. III, № 1. Arcybyšev. C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, v. III, № 1. [3] Gudden. Lichtelektrische Erscheinungen. 1928, Berlin, Springer. [4] Gudden. l. c.

*ФИЗИКА*

**Ю. А. КРУТКОВ**

**член-корреспондент Академии Наук**

# БРОУНОВСКОЕ ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ С ОСЬЮ СИММЕТРИИ

В заметке, опубликованной в этом журнале, я рассмотрел частный случай броуновского вращения частицы с осью симметрии ($A = B \neq C$), а именно тот случай, когда начальная угловая скорость (для $t = 0$) имеет направление оси симметрии, т. е. имеем $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, $r_0 \neq 0$ (1). Здесь я хочу дать решение задачи для общего случая. Для обозначений отсылаю к указанной заметке (цитируется далее как S).

**1.** Если $p_0$ и $q_0$ не равны нулю, то в решении „механической задачи" S [6] $p$ и $q$ должны быть заменены на

$$\begin{aligned} P &= p - e^{-kt}(p_0 \cos \alpha R_t - q_0 \sin \alpha R_t), \\ Q &= q - e^{-kt}(p_0 \sin \alpha R_t + q_0 \cos \alpha R_t). \end{aligned} \tag{1}$$

В силу этого после интегрирования по $X$'ам и $Y$'ам (см. S [13]), мы вместо S [18] получаем

$$w dp\, dq\, dr = \frac{a}{\pi \Theta_1} \left(\frac{b}{2\pi l \tau}\right)^{\frac{n}{2}} dp\, dq \int \dots \int \exp\left[ -\frac{b}{2l\tau} \sum_0^{n-1} Z_s^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{\Theta_1}(P^2 + Q^2) \right] dZ_0 \dots dZ_{n-1} \tag{2}$$

с областью интегрирования $\rho \leqslant \sum_0^{n-1} \alpha_s Z_s \leqslant \rho + d\rho$ (S [14, 14*]). Здесь еще нужно подставить:

$$P^2 + Q^2 = p^2 + q^2 + e^{-2kt}(p_0^2 + q_0^2) - 2e^{-kt}[(pp_0 + qq_0)\cos \alpha R_t + (qp_0 - pq_0)\sin \alpha R_t], \tag{3}$$

$$R_t = \frac{r_0}{l}(1 - e^{-lt}) + \frac{1}{l}\sum_0^{n-1}(1 - \alpha_s) Z_s \tag{4}$$

(см. S [9]).

**2.** Интеграл в [2] приводим к виду

$$S = \int \dots \int \exp\left[ -A \sum_0^{n-1} Z_s^2 + B \cos\left( \alpha^* \sum_0^{n-1} Z_s - \varphi \right) \right] dZ_0 \dots dZ_{n-1}. \tag{5}$$

Здесь

$$A = \frac{b}{2l\tau}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{l}, \quad B = \frac{2ae^{-kt}}{\Theta_1} \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\, \sqrt{p^2 + q^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \varepsilon - c,$$

$$c = \alpha^* r_0 (1 - e^{-lt}) - \alpha^* \rho, \quad \varepsilon = \arctan \frac{qp_0 - pq_0}{pp_0 + qq_0}.$$

Перед интегралом стоит множитель

$$\frac{a}{\pi\Theta_1}\left(\frac{b}{2\pi l\tau}\right)^{\frac{n}{2}} dp\,dq\,\exp\left[-\frac{a}{\Theta_1}\{p^2+q^2+e^{-2kt}(p_0^2+q_0^2)\}\right].$$

Ортогональное преобразование $Z_s=\sum_0^{n-1} a_{rs}\zeta_r$, причем $a_{0s}=\alpha_s/\nabla$,

$$\nabla=\sqrt{\sum_0^{n-1}\alpha_s^2},$$

дает нам, если принять во внимание область интегрирования,

$$S=e^{-A\zeta_0^2}\,d\zeta_0\int\ldots\int\exp\left[-A\sum_1^{n-1}\zeta_r^2+B\cos\left(\alpha^* b_0\zeta_0+\right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left.+\alpha^*\sum_1^{n-1} b_r\zeta_r-\varphi\right)\right]d\zeta_1\ldots d\zeta_{n-1},$$

причем

$$b_0=\sum_0^{n-1}\alpha_s/\nabla,\qquad b_r=\sum_0^{n-1} a_{rs}.$$

Второе ортогональное преобразование

$$\zeta_s=\sum_1^{n-1} c_{rs}\xi_r\quad\text{с}\quad c_{1s}=b_s/D,$$

$D=\sqrt{\sum_1^{n-1} b_r^2}$, т. е. $\xi_1=\sum_1^{n-1} b_r\zeta_r/D$, дает для $S$:

$$S=e^{-A\zeta_0^2}\,d\zeta_0\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-A\xi_1^2+B\cos(\alpha^* D\xi_1+\alpha^* b_0\zeta_0-\varphi)\right]d\xi_1\left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{7}$$

Но мы имеем

$$e^{B\cos(\alpha^* D\xi_1+\varphi^*)}=I_0(B)+2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(B)\cos m(\alpha^* D\xi_1+\varphi^*), \tag{8}$$

где $I_m$ обозначают бесселевы функции мнимого аргумента.

Таким образом,

$$S=e^{-A\zeta_0^2}\left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{n-1}{2}} d\zeta_0\left\{I_0(B)+2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(B)\cos m\varphi^* e^{-\frac{m^2\alpha^{*2}D^2}{4A}}\right\}, \tag{9}$$

где

$$\varphi^*=\alpha^* b_0\zeta_0-\varphi.$$

Но

$$\alpha_s=e^{-lt+l\tau s},$$

поэтому

$$\sum_{0}^{n-1} \alpha_s = \frac{1-e^{-lt}}{l\tau}, \qquad \nabla^2 = \frac{1-e^{-2lt}}{2l\tau} = \frac{\Theta_1}{2l\tau}, \tag{10}$$

$$D^2 = \sum_{s,j=0}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} a_{rs} a_{rj} = \sum_{s,j=0}^{n-1} \left( \delta_{sj} - \frac{\alpha_s \alpha_j}{\nabla^2} \right) = \frac{t}{\tau} - \frac{2(1-e^{-lt})}{l\tau(1+e^{-lt})}. \tag{11}$$

Собирая все вместе, получаем

$$w = \frac{a}{\pi\Theta_1} \left( \frac{b}{\pi\Theta_2} \right)^{1/2} \exp\left[ -\frac{a}{\Theta_1} \left\{ p^2 + q^2 + e^{-2kt}(p_0^2 + q_0^2) - \frac{b}{\Theta_2} \rho^2 \right] \cdot \Sigma, \right. \tag{12}$$

где $\Sigma$ обозначает ряд

$$\Sigma = I_0\left( \frac{2ae^{-kt}}{\Theta_1} \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\, \sqrt{p^2 + q^2} \right) +$$

$$+ 2 \sum_{m=1}^{\infty} I_m \left( \frac{2ae^{-kt}}{\Theta_1} \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\, \sqrt{p^2 + q^2} \right) \cos m \left\{ \alpha^* \left[ r_0 (1 - e^{-lt}) + \right. \right. \tag{13}$$

$$\left. \left. + \frac{1-e^{-lt}}{1+e^{-lt}} \rho \right] - \varepsilon \right\} e^{-\frac{m^2\alpha^2}{2b} \left[ u - \frac{2(1-e^{-lt})}{1+e^{-lt}} \right]}.$$

Для $t \to \infty$ получаем максвеллово распределение

$$w = \frac{ab^{1/2}}{\pi^{3/2}} \exp\left[ -a(p^2 + q^2) - br^2 \right], \tag{14}$$

так как $I_0(0) = 1$, $I_m(0) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Для $p_0 = q_0 = 0$ получаем формулу S [20]. Различные другие случаи я рассмотрю в следующей заметке.

В заключение благодарю моего друга В. А. Фока и А. Д. Александрова, помощь которых мне была очень ценна.

Физический институт им. П. Н. Лебедева.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
27 XII 1934.

# DIE BROWNSCHE ROTATIONSBEWEGUNG EINES ACHSENSYMMETRISCHEN TEILCHENS

Von G. KRUTKOW, korrespondierendem Mitglied der Akademie

In einer in dieser Zeitschrift erschienenen Notiz habe ich einen Spezialfall der Brownschen Rotation eines achsensymmetrischen Teilchens ($A = B \neq C$) betrachtet, nämlich den Fall, dass die Anfangswinkelgeschwindigkeit (für $t = 0$) die Richtung der Symmetrieachse hat, also $p_0 = 0$, $q_0 = 0$, $r_0 \neq 0$ gilt (1). Hier will ich die Lösung der Aufgabe für den allgemeinen Fall angeben. Für die Bezeichnungen sei auf die zitierte Notiz verwiesen (weiter zitiert als S).

1. Sind $p_0$ und $q_0$ nicht gleich Null, so müssen in der Lösung des „mechanischen Problems" S [6] $p$ und $q$ durch

$$\begin{aligned} P &= p - e^{-kt}(p_0 \cos \alpha R_t - q_0 \sin \alpha R_t), \\ Q &= q - e^{-kt}(p_0 \sin \alpha R_t + q_0 \cos \alpha R_t) \end{aligned} \tag{1}$$

ersetzt werden. Dies hat zur Folge, dass man nach Ausführung der Integration über die $X$ und die $Y$ (s. S [13]) statt S [18] folgenden Ausdruck gewinnt:

$$w dp\, dq\, dr = \frac{a}{\pi \Theta_1} \left(\frac{b}{2\pi l \tau}\right)^{\frac{n}{2}} dp\, dq \int \dots \int \exp\left[ -\frac{b}{2l\tau} \sum_0^{n-1}{}' Z_s^2 - \frac{a}{\Theta_1}(P^2 + Q^2) \right] dZ_0 \dots dZ_{n-1} \tag{2}$$

mit dem Integrationsgebiet $\rho \leqslant \sum_0^{n-1}{}' \alpha_s Z_s \leqslant \rho + d\rho$ (S [14, 14*]). Man hat hier noch einzusetzen:

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 = p^2 + q^2 + e^{-2kt}(p_0^2 + q_0^2) - 2e^{-kt}[(pp_0 + qq_0)\cos \alpha R_t + \\ + (qp_0 - pq_0)\sin \alpha R_t], \end{aligned} \tag{3}$$

$$R_t = \frac{r_0}{l}(1 - e^{-lt}) + \frac{1}{l} \sum_0^{n-1}{}' (1 - \alpha_s) Z_s \tag{4}$$

. S [9]).

2. Wir bringen das Integral in (2) auf die Form

$$S = \int \dots \int \exp\left[ -A \sum_0^{n-1}{}' Z_s^2 + B \cos\left( \alpha^n \sum_0^{n-1}{}' Z_s - \varphi \right) \right] dZ_0 \dots dZ_{n-1} \tag{5}$$

Hier ist

$$A=\frac{b}{2l\tau},\qquad \alpha^*=\frac{\alpha}{l},\qquad B=\frac{2ae^{-kt}}{\Theta_1}\sqrt{p_0^2+q_0^2}\sqrt{p^2+q^2}$$

und

$$\varphi=\varepsilon-c,\qquad c=\alpha^* r_0(1-e^{-lt})-\alpha^*\rho,\qquad \varepsilon=\arctan\frac{qp_0-pq_0}{pp_0+qq_0}.$$

Vor dem Integral steht der Faktor

$$\frac{a}{\pi\Theta_1}\left(\frac{b}{2\pi l\tau}\right)^{\frac{n}{2}}dp\,dq\,\exp\left[-\frac{a}{\Theta_1}\{p^2+q^2+e^{-2kt}(p_0^2+q_0^2)\}\right].$$

Die orthogonale Transformation

$$Z_s=\sum_0^{n-1}a_{rs}\zeta_r\quad\text{mit}\quad a_{0s}=\alpha_s/\nabla,$$

$\nabla=\sqrt{\sum_0^{n-1}\alpha_r^2}$ gibt uns, wenn wir noch das Integrationsgebiet berücksichtigen,

$$S=e^{-A\zeta_0^2}d\zeta_0\int\dots\int\exp\left[-A\sum_1^{n-1}\zeta_r^2+B\cos\left(\alpha^* b_0\zeta_0+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\alpha^*\sum_1^{n-1}b_r\zeta_r-\varphi\right)\right]d\zeta_1\dots d\zeta_{n-1} \tag{6}$$

mit

$$b_0=\sum_0^{n-1}\alpha_s/\nabla,\qquad b_r=\sum_0^{n-1}a_{rs}.$$

Eine zweite orthogonale Transformation

$$\zeta_s=\sum_1^{n-1}c_{rs}\xi_r\quad\text{mit}\ c_{1s}=b_s/D,$$

$$D=\sqrt{\sum_1^{n-1}b_r^2},\qquad\text{also}\quad\xi_1=\sum_1^{n-1}b_r\zeta_r/D,\quad\text{liefert für } S$$

$$S=e^{-A\zeta_0^2}d\zeta_0\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-A\xi_1^2+B\cos(\alpha^* D\xi_1+\alpha^* b_0\zeta_0-\varphi)\right]d\xi_1\left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{n-2}{2}}. \tag{7}$$

Nun hat man

$$e^{B\cos(\alpha^* D\xi_1+\varphi^*)}=I_0(B)+2\sum_{m=1}^{\infty}I_m(B)\cos m(\alpha^* D\xi_1+\varphi^*), \tag{8}$$

wo die $I_m$ Besselsche Funktionen von rein imaginärem Argument bedeuten. Es ist also

$$S = e^{-A\zeta_0^2}\left(\frac{\pi}{A}\right)^{\frac{n-1}{2}} d\zeta_0 \left\{ I_0(B) + 2\sum_{m=1}^{\infty} I_m(B)\cos m\varphi^* \, e^{\frac{m^2\alpha^{*2}D^2}{4A}} \right\}, \tag{9}$$

wo $\varphi^* = \alpha^* b_0 \zeta_0 - \varphi$ ist,
Nun ist $\alpha_s = e^{-lt+l\tau s}$ (s. S [14, 14*]). Es ist also

$$\sum_{s=0}^{n-1} \alpha_s = \frac{1-e^{-lt}}{l\tau}, \qquad \nabla^2 = \frac{1-e^{-2lt}}{2l\tau} = \frac{\Theta_2}{2l\tau}, \tag{10}$$

$$D^2 = \sum_{s,j=0}^{n-1}\sum_{r=1}^{n-1} a_{rs}a_{rj} = \sum_{s,j=0}^{n-1}\left(\delta_{sj} - \frac{\alpha_s\alpha_j}{\nabla^2}\right) = \frac{t}{\tau} - \frac{2(1-e^{-lt})}{l\tau(1+e^{-lt})}. \tag{11}$$

Wenn wir jetzt alles zusammenfassen, erhalten wir

$$w = \frac{a}{\pi\Theta_1}\left(\frac{b}{\pi\Theta_2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{a}{\Theta_1}\left\{p^2+q^2+e^{-2kt}(p_0^2+q_0^2)\right\} - \frac{b}{\Theta_2}\rho^2\right] \cdot \Sigma, \tag{12}$$

wo $\Sigma$ die Reihe

$$\Sigma = I_0\left(\frac{2ae^{-kt}}{\Theta_1}\sqrt{p_0^2+q_0^2}\sqrt{p^2+q^2}\right) +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^{\infty} I_m\left(\frac{2ae^{-kt}}{\Theta_1}\sqrt{p_0^2+q_0^2}\sqrt{p^2+q^2}\right)\cos m\left\{\alpha^*\left[r_0(1-e^{-lt}) + \right.\right. \tag{13}$$

$$\left.\left. + \frac{1-e^{-lt}}{1+e^{-lt}}\rho\right] - \varepsilon\right\} e^{-\frac{m^2\alpha^{*2}}{2b}\left[lt - \frac{2(1-e^{-lt})}{1+e^{-lt}}\right]}$$

bezeichnet. Für $t \to \infty$ erhält man die Maxwellsche Verteilung

$$w = \frac{ab^{1/2}}{\pi^{3/2}} \exp\left[-a(p^2+q^2) - br^2\right], \tag{14}$$

da $I_0(0) = 1$, $I_m(0) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ ist. Für $p_0 = q_0 = 0$ wird die Formel S [20] erhalten. Verschiedene andere Fälle will ich in einer weiteren Notiz betrachten.

Zum Schluss ein Wort des Dankes an meinen Freund V. Fock und an A. D. Alexandrov, deren Hilfe mir sehr wertvoll war.

Lebedewsches physikalisches Institut.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
27. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] ДАН, 1934, т. III, № 3, стр. 153. C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, v. III, № 3, p. 156.

*ФИЗИКА*

К. В. НИКОЛЬСКИЙ

# К ТЕОРИИ ФОТОНА

(*Представлено академиком С. И. Вавиловым 2 XII 1934*)

Наша задача заключается в отыскании такого квантового уравнения, которое описывало бы фотон аналогично тому, как уравнение Дирака описывает квантовый электрон и позитрон.

Небольшим изменением в уравнении Дирака мы, в самом деле, можем получить уравнение, свойства которого заставляют предполагать, что оно и является решением вышепоставленной задачи.

Мы предположим, что уравнение фотона напишется:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \rho_1\sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \rho_1\sigma_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \rho_1\sigma_3\frac{\partial\psi}{\partial z} + \lambda(\rho_3 + i\rho_2)\psi = 0. \qquad (a)$$

Это уравнение отличается от уравнения Дирака тем, что вместо матрицы $\rho_3$ оно содержит матрицу $(\rho_3 + i\rho_2)$. Заметим, что $\rho_3$ является величиной инвариантной по отношению к релятивистским преобразованиям, и поэтому уравнение (a) релятивистски инвариантно ($\lambda$ — некоторая постоянная). Если мы вычеркнем инвариант $\lambda i\rho_2$ и положим $\lambda = imc/\hbar$, то мы вернемся к уравнению Дирака.

Введение „дополнительной массы" в уравнение Дирака приводит к двум следствиям.

1. Для энергии $W$ и импульса $\overleftarrow{p}$ квантовой частицы, описываемой уравнением (a), мы получаем соотношение

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2$$

вместо:

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2,$$

к которому приводит уравнение Дирака. Это следствие соответствует нашему стремлению получить уравнение фотона.

2. Уравнение (a) в числе своих решений содержит не-тривиальное постоянное решение $\psi^0$. В самом деле, положив в (a) $\psi$ постоянной мы получим для нее следующее уравнение:

$$(\rho_2 + i\rho_2)\psi = 0, \qquad (b)$$

или, раскрывая значение матриц $\rho_3$ и $\rho_2$:

$$\psi_3^0 = -\psi_1^0,\ \psi_4^0 = -\psi_2^0,\ \psi^0 = \text{const}. \qquad (b')$$

Это решение мы можем рассматривать как состояние для уничтоженного фотона.* Соответственно этому предположению электромагнитное поле будет описываться квантовыми переходами из состояния $\psi^0$ в какое-либо иное $\psi^n$ и обратно:

$$\psi^0 \to \psi^n,\ \psi^n \to \psi^0.$$

* Ср. Louis de Broglie. C. R., **197**, 1934.

Процессы эти будут описываться билинейными формами, составленными из $\psi_k^0$ и $\psi_i^n$ по закону

$$\sum_{ik} \psi_i^0 \alpha_{ik} \psi_k^n = \overline{\alpha}, \qquad (c)$$

где $(\alpha)$ — какая-либо матрица.

Из решений уравнения (a), как это известно из теории уравнений Дирака, мы можем составить 16 билинейных линейно-независимых форм типа (c), соответственно тому, что имеется 16 линейно-независимых матриц:

$$(1),\ (\sigma_1),\ (\sigma_2),\ (\sigma_3),\ (\rho_1),\ (\rho_2),\ (\rho_3),\ (\sigma_1\rho_1),\ (\sigma_2\rho_1),\ (\sigma_3\rho_1),\ (\sigma_1\rho_2),\ (\sigma_2\rho_2),\ (\sigma_3\rho_2),\ (\sigma_1\rho_3),\ (\sigma_2\rho_3),\ (\sigma_3\rho_3).$$

Эти 16 билинейных линейно-независимых форм удовлетворяют 16 дифференциальным уравнениям, следующим из уравнений (a).

Мы поставим себе задачу определить эти уравнения для форм, образованных по закону

$$\overline{\alpha} = \sum_{i,\,k=1}^{4} \psi_i^0 \alpha_{ik} \psi_k^n$$

и, следовательно отвечающих переходам $\psi^0 \to \psi^n$ и $\psi^n \to \psi^0$.

Вычислим сначала сами формы, билинейные в $\psi_i$

$$\begin{aligned}
\overline{1} &= \psi_1^0\psi_1 + \psi_2^0\psi_2 - \psi_1^0\psi_3 - \psi_2^0\psi_4\\
\overline{\sigma_1} &= \psi_1^0\psi_2 + \psi_2^0\psi_1 - \psi_1^0\psi_4 - \psi_2^0\psi_3\\
\overline{\sigma_2} &= -i\psi_1^0\psi_2 + i\psi_2^0\psi_1 + i\psi_1^0\psi_4 - i\psi_2^0\psi_3\\
\overline{\sigma_3} &= \psi_1^0\psi_1 - \psi_2^0\psi_2 - \psi_1^0\psi_3 + \psi_2^0\psi_4\\
\overline{\rho_1} &= \psi_1^0\psi_3 + \psi_2^0\psi_4 - \psi_1^0\psi_1 - \psi_2^0\psi_2\\
\overline{\rho_2} &= -i\psi_1^0\psi_3 - i\psi_2^0\psi_4 - i\psi_1^0\psi_1 - i\psi_2^0\psi_2\\
\overline{\rho_3} &= \psi_1^0\psi_1 + \psi_2^0\psi_2 + \psi_1^0\psi_3 + \psi_2^0\psi_4\\
\overline{\rho_2\sigma_2} &= -\psi_1^0\psi_4 + \psi_2^0\psi_3 - \psi_1^0\psi_2 + \psi_2^0\psi_1\\
\overline{\rho_3\sigma_1} &= \psi_1^0\psi_2 + \psi_2^0\psi_1 + \psi_1^0\psi_4 + \psi_2^0\psi_3\\
\overline{\rho_3\sigma_2} &= -i\psi_1^0\psi_2 + i\psi_2^0\psi_1 - i\psi_1\psi_4 + i\psi_2\psi_3\\
\overline{\rho_3\sigma_3} &= \psi_1^0\psi_1 - \psi_2^0\psi_2 + \psi_1^0\psi_3 - \psi_2^0\psi_4\\
\overline{\rho_1\sigma_1} &= \psi_1^0\psi_4 + \psi_2^0\psi_3 - \psi_1^0\psi_2 - \psi_2^0\psi_1\\
\overline{\rho_1\sigma_2} &= -i\psi_1^0\psi_4 + i\psi_2^0\psi_3 + i\psi_1^0\psi_2 - i\psi_2^0\psi_1\\
\overline{\rho_1\sigma_3} &= \psi_1^0\psi_3 - \psi_2^0\psi_1 - \psi_1^0\psi_1 + \psi_2^0\psi_2\\
\overline{\rho_2\sigma_1} &= -i\psi_1^0\psi_4 - i\psi_2^0\psi_3 - i\psi_1^0\psi_2 - i\psi_2^0\psi_1\\
\overline{\rho_2\sigma_3} &= -i\psi_1^0\psi_3 + i\psi_2^0\psi_4 - i\psi_1^0\psi_1 + i\psi_2\psi,
\end{aligned}$$

где для упрощения у $\psi_i$ отброшен, как и в дальнейшем, индекс $n$. Между перечисленными 16 выражениями существует 8 тождеств, а именно:

$$\begin{aligned}
&\overline{1} + \overline{\rho_1} = 0,\ \overline{\sigma_1} + \overline{\rho_1\sigma_1} = 0,\ \overline{\sigma_2} + \overline{\rho_1\sigma_2} = 0,\ \overline{\sigma_3} + \overline{\rho_1\sigma_3} = 0\\
&\overline{\rho_2} + i\overline{\rho_3} = 0,\ \overline{\rho_2\sigma_1} + i\overline{\rho_3\sigma_1} = 0,\ \overline{\rho_2\sigma_2} + i\overline{\rho_3\sigma_2} = 0,\ \overline{\rho_2\sigma_3} + i\overline{\rho_3\sigma_3} = 0.
\end{aligned} \qquad (d)$$

Определив формы, мы найдем, по уравнению (a), уравнения, которым они удовлетворяют; для этого мы множим (a) слева на $\psi_0\alpha$, где $\alpha$, последовательно, каждая из 16 матриц, указанных выше.

Мы получим следующие 16 дифференциальных уравнений (для упрощения везде опущены черточки над символом билинейной формы):*

$$\frac{\partial 1}{\partial \tau}+\frac{\partial}{\partial x}\rho_1\,\sigma_1+\frac{\partial}{\partial y}\rho_1\,\sigma_2+\frac{\partial}{\partial z}\rho_1\,\sigma_3+\lambda(\rho_3+i\rho_2)=0$$

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}\rho_1+i\left(\frac{\partial}{\partial y}\rho_1\,\sigma_3-\frac{\partial}{\partial z}\rho_1\,\sigma_2\right)+\lambda(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_1=0$$

$$\frac{\partial\sigma_2}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial y}\rho_1+i\left(\frac{\partial}{\partial z}\rho_1\,\sigma_2-\frac{\partial}{\partial x}\rho_1\,\sigma_3\right)+\lambda(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_2=0$$

$$\frac{\partial\sigma_3}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial z}\rho_1+i\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho_1\,\sigma_2-\frac{\partial}{\partial y}\rho_1\,\sigma_1\right)+\lambda(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_3=0$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial\tau}+\frac{\partial\sigma_1}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_2}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_3}{\partial z}-\lambda(\rho_3+i\rho_2)=0$$

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial\tau}-i\frac{\partial}{\partial x}\rho_3\,\sigma_1-i\frac{\partial}{\partial y}\rho_3\,\sigma_2-i\frac{\partial}{\partial z}\rho_3\,\sigma_3+\lambda i(1+\rho_1)=0$$

$$\frac{\partial\rho_3}{\partial\tau}+i\frac{\partial}{\partial x}\rho_2\,\sigma_1+i\frac{\partial}{\partial y}\rho_2\,\sigma_2+i\frac{\partial}{\partial z}\rho_2\,\sigma_3+\lambda(1+\rho_1)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho_1\,\sigma_1+\frac{\partial 1}{\partial x}+i\left(\frac{\partial\sigma_3}{\partial y}-\frac{\partial\sigma_2}{\partial z}\right)-\lambda(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_1=0 \qquad \text{(e)}$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho_1\,\sigma_2+\frac{\partial 1}{\partial y}+i\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial z}-\frac{\partial\sigma_3}{\partial x}\right)-\lambda(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_2=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\rho_1\,\sigma_3+\frac{\partial 1}{\partial z}+i\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial x}-\frac{\partial\sigma_1}{\partial y}\right)-\lambda(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_3=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_1]+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_3+i\rho_2)+$$
$$+i\left(\frac{\partial}{\partial y}[\sigma_3(\rho_3+i\rho_2)]-\frac{\partial}{\partial z}[\sigma_2(\rho_3+i\rho_2)]\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_2]+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_3+i\rho_2)+$$
$$+i\left(\frac{\partial}{\partial z}[\sigma_1(\rho_3+i\rho_2)]-\frac{\partial}{\partial z}[\sigma_3(\rho_3+i\rho_2)]\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}[(\rho_3+i\rho_2)\,\sigma_3]+\frac{\partial}{\partial z}(\rho_3+i\rho_2)+$$
$$+i\left(\frac{\partial}{\partial y}[\sigma_2(\rho_3+i\rho_2)]-\frac{\partial}{\partial x}[\sigma_1(\rho_3+i\rho_2)]\right)=0$$

Воспользуемся теперь вышеупомянутыми тождествами. Введем для этого следующие обозначения:

$$\overline{1}=-\overline{\rho_1}=A_0;\ \overline{\sigma_1}=-\overline{\rho_1\,\sigma_1}=A_1,\ \overline{\sigma_2}=-\overline{\rho_1\,\sigma_2}=A_2,\ \overline{\sigma_3}=-\overline{\rho_1\,\sigma_3}=A_3$$
$$\overline{\rho_3}=\overline{i\rho_2}=\beta;\ \overline{\rho_3\,\sigma_1}=\overline{i\rho_2\,\sigma_1}=\Phi_1,\ \overline{\rho_3\,\sigma_2}=\overline{i\rho_2\,\sigma_2}=\Phi_2,\ \overline{\rho_3\,\sigma_3}=\overline{i\rho_2\,\sigma_3}=\Phi_3.$$

Мы видим, что уравнения (e) распадаются на две группы по восьми уравнений в каждой, повторяющих друг друга.

Если мы воспользуемся векториальной символикой и обозначим через $\vec{A}$ вектор $A_1$, $A_2$, $A_3$ и через $\vec{\Phi}$ вектор $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$, то мы запишем уравнения (e) в следующей форме:**

$$-\frac{\partial A_0}{\partial\tau}+\operatorname{div}\vec{A}=2\lambda\beta\qquad 2\lambda\vec{\Phi}=-\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}+\operatorname{grad}A_0+i\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\tau}+\operatorname{div}\vec{\Phi}=0\qquad -\frac{\partial\vec{A}}{\partial\tau}=i\operatorname{rot}\vec{\Phi}+2\operatorname{grad}\beta$$

$\beta$ — инвариант. Полагая $\beta=0$, мы получаем, следовательно, уравнения Максвелла и уравнения, определяющие потенциалы.

* Воспользовавшись известными соотношениями $\sigma_1\,\sigma_2=i\sigma_3$, $\rho_1\,\rho_2=i\rho_3$ и т. д.

** Закон преобразования уравнений (e) легко может быть установлен.

Таким образом, уравнения (a) приводят для величин, описывающих квантовые переходы фотона, к уравнениям Максвелла.

Наличие инварианта $\beta$ устраняет затруднения, встречающиеся при переходе от уравнений для отдельного фотона к уравнениям статистическим (мы имеем в виду „вторичное квантование“).* Вместе с тем определение величин, описывающих электромагнитное поле посредством билинейных форм из $\psi$-функций, позволяет свести вопрос о правилах коммутации первых к вопросу о правилах коммутации вторых. Статистика Бозе-Эйнштейна, устанавливаемая на соотношениях для $\vec{\Phi}$, сводится нами к статистике для $\psi$-волн.

Физический институт им. П. Н. Лебедева.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
2 XII 1934.

---

*PHYSIQUE*

## CONTRIBUTION À LA THÉORIE DU PHOTON

Par K. NIKOLSKIJ (NIKOLSKY)

(*Présenté par S. Wawilow, de l'Académie, le 2. XII. 1934*)

Nous nous proposons ici de rechercher une équation quantique pour le photon qui le décrive de façon analogue à ce que nous avons dans l'équation de Dirac pour l'électron et le positron quantiques.

A l'aide d'une légère modification apportée à l'équation de Dirac nous pouvons, en effet, obtenir une équation dont les propriétés nous font admettre qu'elle est bien une solution du problème posé.

Nous admettrons que l'équation du photon s'écrira ainsi:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + \rho_1\sigma_1\frac{\partial\psi}{\partial x} + \rho_1\sigma_2\frac{\partial\psi}{\partial y} + \rho_1\sigma_3\frac{\partial\psi}{\partial z} + \lambda(\rho_3 + i\rho_2)\psi = 0 \qquad (a)$$

Cette équation diffère de celle de Dirac en ce qu'elle renferme, au lieu de la matrice $\rho_3$, la matrice $(\rho_3 + i\rho_2)$. Nous observerons que $\rho_2$ est une grandeur invariante par rapport aux transformations relativistes et que pour cette raison l'équation (a) est également invariante pour les transformations relativistes. En biffant l'invariant $\lambda i\rho_2$ et en posant $\lambda = imc/\hbar$, nous reviendrons à l'équation de Dirac. L'introduction d'une „masse supplémentaire“ dans l'équation de Dirac conduit à deux conséquences.

1. Pour l'énergie $W$ et pour l'impulsion $\vec{p}$ de la particule quantique décrite par l'équation (a) nous obtenons la relation

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2$$

au lieu de

$$\frac{W^2}{c^2} = p^2 + m^2c^2$$

à laquelle conduit l'équation de Dirac. Cette conséquence répond à notre besoin d'obtenir l'équation du photon.

* Он находится в согласии с вводимой нами номенклатурой. Вместе с тем, полагая $\beta = 0$, мы получаем обычные уравнения Максвелла для любой релятивистской системы. Это условие инвариантно.

2. L'équation (a), au nombre de ses solutions, comporte une solution constante non triviale $\psi^0$. En effet, posant dans (a) $\psi$ constante nous obtiendrons pour elle l'équation suivante:

$$(\rho_3 + i\rho_2)\psi = 0, \qquad (b)$$

ou, en ouvrant la signification des matrices $\rho_3$ et $\rho_2$,

$$\psi_3^0 = -\psi_1^0, \ \psi_4^0 = -\psi_2^0, \ \psi^0 = \text{const.} \qquad (b')$$

Nous pouvons considérer cette solution comme un état pour un photon anéanti.* Conformément à cette supposition le champ électromagnétique sera décrit par des transitions quantiques de l'état $\psi^0$ à un autre état quelconque $\psi^n$ et *vice versa*:

$$\psi^0 \to \psi^n, \ \psi^n \to \psi^0.$$

Ces processus seront représentés par des formes bilinéaires, composées des $\psi_k^0$ et des $\psi_i^n$ suivant la loi

$$\sum_{ik} \psi_i^0 \alpha_{ik} \psi_k^n = \alpha, \qquad (c)$$

où $(\alpha)$ est une matrice quelconque.

Avec les solutions de l'équation (a) nous pouvons, comme on le sait de la théorie des équations de Dirac, composer seize formes bilinéaires linéairement indépendantes du type de (c), en conformité avec le fait de l'existence de 16 matrices linéairement indépendantes:

$$(1), (\sigma_1), (\sigma_2), (\sigma_3), (\rho_1), (\rho_2), (\rho_3), (\sigma_1\rho_1), (\sigma_2\rho_1), (\sigma_3\rho_1), (\sigma_1\rho_2), (\sigma_2\rho_2), (\sigma_3\rho_2), (\sigma_1\rho_3), (\sigma_2\rho_3), (\sigma_3\rho_3).$$

Ces 16 formes bilinéaires linéairement indépendantes du type (c) satisfont aux 16 équations différentielles dérivant de l'équation (a).

Nous envisagerons le problème de déterminer ces équations pour les formes composées suivant la loi

$$\overline{\alpha} = \sum_{i,k=1} \psi_i^0 \alpha_{ik} \psi_k^n$$

et correspondant, en conséquence, aux transitions $\psi^0 \to \psi^n$ et $\psi^n \to \psi^0$. Calculons d'abord les formes mêmes bilinéaires en $\psi_i$ (voir p. 373) où sont supprimés, chez les $\psi_i$, comme partout dans la suite, pour simplifier, les index $n$. Entre les seize expressions énumerées il existe huit identités, soit:

$$\begin{gathered} \overline{1} + \rho_1 = 0, \ \overline{\sigma_1} + \overline{\rho_1\sigma_1} = 0, \ \overline{\sigma_2} + \overline{\rho_1\sigma_2} = 0, \ \overline{\sigma_3} + \overline{\rho_1\sigma_3} = 0 \\ \overline{\rho_2} + i\overline{\rho_3} = 0, \ \overline{\rho_2\sigma_1} + i\overline{\rho_3\sigma_1} = 0, \ \overline{\rho_2\sigma_2} + i\overline{\rho_3\sigma_2} = 0, \ \overline{\rho_2\sigma_3} + i\overline{\rho_3\sigma_3} = 0 \end{gathered} \qquad (d)$$

Ayant déterminé les formes, nous trouverons, de par l'équation (a), les équations auxquelles elles satisfont; à cet effet, nous multiplions le côté gauche de (a) par les $\overline{\psi_0}\alpha$, où $\alpha$ représente consécutivement chacune des seize matrices susindiquées.

* Cf. L. de Broglie. C. R., 197, 1934.

Nous obtiendrons* les 16 équations différentielles suivantes (pour simplifier, nous avons partout omis le trait au-dessus du symbole de la forme bilinéaire) (voir p. 374).

Tirons parti maintenant des identités susmentionnées. Introduisons à cette fin les désignations suivantes:

$$\overline{1} = -\overline{\rho_1} = A_0,\ \overline{\sigma_1} = -\overline{\rho_1\sigma_1} = A_1,\ \overline{\sigma_2} = -\overline{\rho_1\sigma_2} = A_2,\ \overline{\sigma_3} = -\overline{\rho_1\sigma_3} = A_3$$

$$\overline{\rho_3} = \overline{i\rho_2} = \beta;\ \overline{\rho_3\sigma_1} = \overline{i\rho_2\sigma_1} = \Phi_1,\ \overline{\rho_3\sigma_2} = \overline{i\rho_2\sigma_2} = \Phi_2,\ \overline{\rho_3\sigma_3} = \overline{i\rho_2\sigma_3} = \Phi_3$$

Nous voyons que les équations (e) se décomposent en deux groupes de huit équations chaque se répétant deux à deux.

Faisant usage de la symbolique vectorielle et désignant par $\vec{A}$ le vecteur $A_1$, $A_2$, $A_3$, par $\vec{\Phi}$ le vecteur $\Phi_1$, $\Phi_2$, $\Phi_3$ nous transcrirons les équations (e) sous la forme suivante:**

$$-\frac{\partial A_0}{\partial \tau} + \operatorname{div}\vec{A} = 2\lambda\beta,\quad 2\lambda\vec{\Phi} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial \tau} + \operatorname{grad} A_0 + i\operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \tau} + \operatorname{div}\vec{\Phi} = 0,\quad -\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \tau} = i\operatorname{rot}\vec{\Phi} + 2\operatorname{grad}\beta$$

$\beta$ est un invariant. Posant $\beta = 0$ nous obtenons les équations de Maxwell et les équations définissant les potentiels.

Ainsi, les équations (a) conduisent, pour les grandeurs représentant les transitions quantiques du photon, aux équations de Maxwell.

L'existence de l'invariant nous affranchit des difficultés qui surgissent au passage des équations pour le photon isolé aux équations d'ordre statistique (nous avons en vue ici la „deuxième quantification“).*** De plus, la définition des grandeurs représentant le champ électromagnétique au moyen de formes bilinéaires constituées par des fonctions $\psi$, permet de réduire la question des règles de commutation des premières à la question de celles variables pour les secondes. La statistique de Bose-Einstein, basée sur les relations en vigueur pour les $\vec{\Phi}$ est ramenée par nous à la statistique pour les ondes $\psi$.

Institut physique P. Lebedew.
Académie des Sciences de
l'URSS. Moscou.

Manuscrit reçu
le 2. XII. 1934.

---

* Nous aidant des relations bien connues $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3$, $\rho_1\rho_2 = i\rho_3$ etc...

** La loi de transformation des équations (e) peut être facilement établie. Elle est en accord avec la nomenclature par nous introduite.

*** En même temps, en posant $\beta = 0$, nous obtenons les équations ordinaires de Maxwell pour un système relativiste quelconque. Cette condition est invariante.

М. УСАНОВИЧ

# О ДИАГРАММАХ ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДВОЙНЫХ ЖИДКИХ СИСТЕМ

(*Представлено академиком Н. С. Курнаковым 14 XII 1934*)

Настоящая работа представляет попытку общего анализа диаграммы состав-свойство двойной жидкой системы, причем рассматриваются только те свойства, которые для идеальной системы подчиняются правилу смешения. Если в какой-нибудь двойной жидкой системе обнаруживается отступление такого свойства (например, показателя преломления) от аддитивности, то это отступление приписывается молекулярным изменениям (образование химических соединений, распад ассоциированных молекул на простые), происходящим в системе.

Мы намерены разобрать в общем виде диаграммы двойной системы, компоненты которой образуют одно химическое соединение, считая, что свойство, аддитивное для идеальной двойной системы, остается аддитивным и в случае образования соединения, но систему следует рассматривать уже не как двойную, а как тройную.

Подобными представлениями пользовался Долежалек [1]; у Друккера [2] также находим аналогичное указание.

Рассмотрим случай образования эквимолекулярного соединения. Тройная формула будет иметь вид:

$$z = \frac{z_B + x(z_A - z_B) + y(z_{AB} - z_A - z_B)}{1 - y}, \qquad (1)$$

где $z$ — величина свойства системы, $z_A$, $z_B$, $z_{AB}$ — величины свойств компонентов $A$ и $B$ и соединения $AB$, $x$ — взятое количество компонента $A$ в молевых дробях, $y$ — равновесное количество соединения $AB$.

Если пренебречь изменением объема при смешении, то по закону действующих масс

$$y = \frac{1+k}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 - x + x^2}, \qquad (2)$$

где $k$ — постоянная равновесия.

Различие типов диаграмм определяется, с одной стороны, величиной $k$, изменяющейся от 0 до $\infty$, с другой стороны — соотношениями параметров $z_A$, $z_B$ и $z_{AB}$. Разберем важнейшие из возможных случаев.

При $k = 0$ получаем два решения (2):

$$y_1 = 1 - x, \quad y_2 = x.$$

Соответственно этому (1) распадается на два уравнения:

$$z_1 = \frac{x(2z_A - z_{AB}) + z_{AB} - z_A}{x} \quad (3) \text{ и } z_2 = \frac{z_B + x(z_{AB} - 2z_B)}{1 - x}. \qquad (3')$$

Получаем диаграмму, состоящую из двух гипербол, пересекающихся в сингулярной точке $x = \frac{1}{2}$. Такая сингулярная диаграмма подробно разобрана В. Я. Аносовым [3], получившим те же уравнения другим путем. Отметим, что сингулярный характер диаграммы определяется условием $k = 0$ (компоненты соединяются нацело) и не зависит от соотношений между $z_A$, $z_B$ и $z_{AB}$; следовательно, сингулярная диаграмма, полученная по одному свойству данной системы, предопределяет сингулярный характер диаграмм всех свойств данной системы. Это положение давно уже выставлено акад. Н. С. Курнаковым.

Перейдем к исследованию общего случая систем, компоненты которых образуют диссоциированное соединение ($k > 0$). Дифференцируя (1) по $x$, находим:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{[x(z_A - z_B) + z_{AB} - z_A]\frac{dy}{dx} + (1-y)(z_A - z_B}{(1-y)^2}; \quad (4)$$

и далее

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2(1-y)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + [x(z_A - z_B) + z_{AB} - z_A]\frac{d^2y}{dx^2}}{(1-y)^2}. \quad (5)$$

Дифференцируя (2) по $x$, получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{2\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 - x + x^2}} \quad (6) \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{k(k+2)}{4\left(\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 - x + x^2}\right)^3}. \quad (7)$$

При

$$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+k}, \quad (6') \quad \text{и} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2k(k+2)}{(1+k)^3}, \quad (7')$$

$$\frac{dz}{dx} = (z_{AB} - z_A)\frac{dy}{dx} + z_A - z_B = \frac{z_{AB} + z_B + k(z_A - z_B)}{1+k} \quad (4')$$

и

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2(z_{AB} - z_A)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(z_A - z_B)\frac{dy}{dx} + (z_{AB} - z_A)\frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$= \frac{2(z_{AB} - z_A)}{(1+k)^2} + \frac{2(z_A - z_B)}{1+k} - \frac{2k(k+2)(z_{AB} - z_A)}{(1+k)^3} =$$

$$= 2\frac{(z_{AB} - z_A)(1-k-k^2) + (z_A - z_B)(1+k)^2}{(1+k)^3}. \quad (5')$$

При

$$x = \frac{1}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \quad (6'') \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}, \quad (7'') \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z_A - z_B}{1-y} \quad (4'')$$

и

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(2z_{AB} - z_A - z_B)\frac{d^2y}{dx^2}}{2(1-y)^2} = \frac{z_A + z_B - 2z_{AB}}{(1-y)^2\sqrt{k(k+2)}}. \quad (5'')$$

При

$$x = 1, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+k}, \quad (6''') \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2k(k+2)}{(1+k)^3}, \quad (7''')$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z_A - z_{AB} + k(z_A - z_B)}{1+k} \quad (4''')$$

и

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2\frac{(z_{AB} - z_B)(1-k-k^2) - (z_A - z_B)(1+k)^2}{(1+k)^3}. \quad (5''')$$

Рассмотрим два случая: 1) величина свойства образующегося соединения является по отношению к величинам свойств компонентов крайней, т. е. наибольшей или наименьшей ($z_{AB} > z_A > z_B$ или $z_{AB} < z_A < z_B$); 2) свойство соединения выражается промежуточной величиной ($z_A > z_{AB} > z_B$).

I. Случай первый. а) $z_{AB} \geqslant z_A \geqslant z_B$. При $x=0$, $\frac{dz}{dx} > 0$; $\frac{d^2z}{dx^2} \geqslant 0$, если $(z_{AB}-z_A)(1-k-k^2)+(z_A-z_B)(1+k)^2 \geqslant 0$, т. е.

$$\frac{k^2+k-1}{(1+k)^2} \leqslant \frac{z_A-z_B}{z_{AB}-z_A}; \quad \frac{d^2z}{dx^2} \leqslant 0, \quad \text{если} \quad \frac{k^2+k-1}{(1+k)^2} \geqslant \frac{z_A-z_B}{z_{AB}-z_A}.$$

При $x=\frac{1}{2}$, $\frac{dz}{dx} \geqslant 0$, $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$; $\frac{dz}{dx}=0$, если $z_A=z_B$.

При $x=1$, $\frac{dz}{dx} > 0$, если $z_A - z_B > -\frac{dy}{dx}(z_{AB}-z_B)$, т. е. $k > \frac{z_{AB}-z_A}{z_A-z_B}$.

Если $z_{AB}=z_A$, то $\frac{dz}{dx} > 0$; $\frac{dz}{dx} < 0$, если $k < \frac{z_{AB}-z_A}{z_A-z_B}$; $\frac{d^2z}{dx^2} \geqslant 0$, если $\frac{k^2+k-1}{(1+k)^2} \leqslant \frac{z_B-z_A}{z_{AB}-z_B}$ и $\frac{d^2z}{dx^2} \leqslant 0$, если $\frac{k^2+k-1}{(1+k)^2} \geqslant \frac{z_B-z_A}{z_{AB}-z_B}$.

Мы видим, что при рассматриваемых соотношениях между параметрами наша диаграмма может иметь вид кривой с максимумом в части, прилегающей к компоненту $A$, так как $\frac{dz}{dx}$, имеющая положительное значение при $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$, может при $x=1$ иметь обратный знак. Так как знак $\frac{dz}{dx}$ меняется между $x=\frac{1}{2}$ и $x=1$, то максимум сдвинут в сторону компонента, обладающего большей величиной данного свойства ($z_A > z_B$).

Условие появления максимума

$$\left(k < \frac{z_{AB}-z_A}{z_A-z_B}\right)$$

показывает, что последний осуществляется при тем больших значениях $k$, чем больше разность между $z_{AB}$ и $z_A$; другими словами, если величина свойства образующегося соединения значительно превосходит величину свойств компонентов, то максимум сохраняется на кривой даже и при больших значениях $k$, т. е. при большой степени распада на компоненты. При $z_A$, близком к $z_{AB}$, максимум сохраняется только при малых значениях $k$. В предельном случае ($z_{AB}=z_A$) максимум невозможен ни при каких значениях $k$. Кроме максимума, на кривой возможны два перегиба, так как $\frac{d^2z}{dx^2}$, отрицательная при $x=\frac{1}{2}$, может иметь положительный знак при $x=0$ и $x=1$. Из условий перемены знака $\frac{d^2z}{dx^2}$ следует, что перегибы появляются тем легче, чем меньше $k$; при этом условие перегиба между $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$ легче выполнимо. Перегиб между $x=\frac{1}{2}$ и $x=1$ возможен лишь при очень малых $k$, т. е. на диаграммах, приближающихся к сингулярному типу. При $z_{AB}=z_A$, когда максимум отсутствует, мы получаем диаграмму с одним только перегибом в первой половине, осуществляющимся независимо от величины $k$, так как $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$ при $x=0$ и $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$ при $x=\frac{1}{2}$ и $x=1$. При $z_A=z_B$ максимум отвечает $x=\frac{1}{2}$, т. е. составу соединения $AB$; местоположение максимума не зависит от $k$. Условием перегиба в этом случае является $k^2+k-1 \leqslant 0$; диаграмма вполне симметрична, и перегибы либо существуют в обеих половинах,

либо отсутствуют. Диаграмму такого типа следует назвать рациональной (не сингулярной), так как максимум приходится на стехиометрическое отношение между компонентами (состав образующегося соединения). Примерами рациональных диаграмм могут служить диаграммы внутреннего трения систем $SbBr_3 - CH(C_6H_5)_3$ [4] и $AsCl_3 - C_6H_5OCH_3$ [5]. Отсутствие второго перегиба на изотермах внутреннего трения первой из этих систем мы склонны приписать отсутствию измерений в части диаграммы, прилегающей к $SbBr_3$. При переходе от данного свойства, характеризующегося равенством величин $z_A$ и $z_B$, к другому (независимому) свойству нельзя ожидать сохранения рационального типа диаграммы

б) $z_{AB} \leqslant z_A \leqslant z_B$. Этот случай отличается от предыдущего лишь тем, что вместо максимума мы будем иметь минимум.

в) $z_{AB} \geqslant z_B \geqslant z_A$ и $z_{AB} \leqslant z_B \leqslant z_A$ приводятся к а) и б); при этом правая и левая половина диаграммы меняются местами.

II. Случай второй. $z_A > z_{AB} > z_B$.

$$x = 0, \quad \frac{dz}{dx} > 0, \quad \frac{d^2z}{dx^2} > 0.$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad \frac{dz}{dx} > 0; \quad \frac{d^2z}{dx^2} > 0$$

при

$$z_{AB} < \frac{z_A + z_B}{2}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} < 0 \quad \text{при} \quad z_{AB} > \frac{z_A + z_B}{2}.$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0, \quad \text{если} \quad z_{AB} = \frac{z_A + z_B}{2}. \qquad x = 1, \quad \frac{dz}{dx} > 0, \quad \frac{d^2z}{dx^2} < 0.$$

Таким образом, при $z_A > z_{AB} > z_B$ мы получаем, независимо от величины $k$, диаграмму с одним перегибом, расположенным между $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ если $z_{AB} > \frac{z_A + z_B}{2}$ и между $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$, если $z_{AB} < \frac{z_A + z_B}{2}$.

Примерами диаграмм такого типа являются диаграммы внутреннего трения систем $AsCl_3 - (C_2H_5)_2O$ [6] и $H_2SO_4 - C_6H_5NO_2$ [7].

При $z_{AB} = \frac{z_A + z_B}{2}$ перегиб приходится на $x = \frac{1}{2}$; следовательно, возможны рациональные (несингулярные) диаграммы, особой точкой которых является точка перегиба.

Поступило
14 XII 1934.

## PHYSIKALISCHE CHEMIE

# ÜBER DIE DIAGRAMME DER PHYSIKALISCH-CHEMISCHEN ANALYSE VON BINÄREN FLÜSSIGEN SYSTEMEN

Von M. USANOVIČ (USSANOWITSCH)

(*Vorgelegt von S. Kurnakov, Mitglied der Akademie, d. 14. XII. 1934*)

Vorliegende Arbeit bietet einen Versuch, eine allgemeine Analyse des Zusammensetzung-Eigenschaftsdiagramms eines binären flüssigen Systems zu geben, wobei nur jene Eigenschaften berücksichtigt werden, welche bei einem idealen System additiv sind.

Lässt in irgend einem flüssigen binären System eine derartige Eigenschaft (z. B. der Brechungsindex) eine Abweichung von der Additivität erkennen, so wird diese Abweichung als Resultat der im System vor sich gehenden molekularen Veränderungen, betrachtet (Bildung von chemischen Verbindungen, Zerfall von assoziierten Molekeln in Einzelbestandteile).

Wir werden die allgemeine Gestalt des Diagramms eines binären Systems betrachten, dessen Komponenten eine chemische Verbindung bilden, wobei wir annehmen, dass eine für das ideale binäre System additive Eigenschaft ihre Additivität auch im Falle der Bildung einer chemischen Verbindung beibehält; das System ist aber dabei nicht als binäres, sondern als ternäres zu betrachten.

Ähnliche Vorstellungen finden wir bei Dolezalek[1] sowie bei Drucker[2].

Wenden wir uns dem Fall der Bildung einer äquimolekularen Verbindung zu. Die ternäre Formel gestaltet sich wie folgt:

$$z = \frac{z_B + x(z_A - z_B) + y(z_{AB} - z_A - z_B)}{1 - y}, \qquad (1)$$

worin $z$ den Zahlenwert der Eigenschaft im System bezeichnet, $z_A$, $z_B$, $z_{AB}$ — die Werte der Eigenschaften der Komponenten $A$ und $B$ und der Verbindung $AB$, $x$ — die Menge der Komponente $A$ (Molbruch) $y$ — die Menge der Verbindung $AB$ im Gleichgewicht.

Vernachlässigen wir nun die beim Vermischen auftretende Volumveränderung, so ergibt sich nach dem Massenwirkungsgesetz

$$y = \frac{1+k}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 - x + x^2}, \qquad (2)$$

worin $k$ die Gleichgewichtskonstante ist.

Die Unterschiede zwischen den Diagrammtypen rühren einmal von den Werten der Konstante $k$, welche von 0 bis $\infty$ variiert her, anderseits von den Grössenverhältnissen zwischen den Parametern $z_A$, $z_B$ und $z_{AB}$.

Wenden wir uns den wichtigsten möglichen Fällen zu.

Bei $k = 0$ erhalten wir zwei Lösungen von (2): $y_1 = 1 - x$; $y_2 = x$.

Dementsprechend zerfällt (1) in zwei Gleichungen:

$$z_1 = \frac{x(2z_A - z_{AB}) + z_{AB} - z_A}{x} \qquad (3) \qquad \text{und} \qquad z_2 = \frac{z_B + x(z_{AB} - 2z_B)}{1 - x}. \qquad (3')$$

Wir erhalten ein Diagramm, das aus zwei sich im Singularpunkt $x = \frac{1}{2}$ schneidenden Hyperbeln besteht. Ein derartiges Singulardiagramm ist von V. Anossow[3], welcher zu denselben Gleichungen auf anderem Wege gelangte, ausführlich erörtert worden. Wir möchten betonen, dass der singuläre Charakter des Diagramms von der Bedingung $k = 0$ herrührt und von den Grössenverhältnissen von $z_A$, $z_B$ und $z_{AB}$ nicht abhängt: das nach einer Eigenschaft des Systems erhaltene singuläre Diagramm bestimmt somit den singulären Charakter der Diagramme sämtlicher Eigenschaften des betreffenden Systems. Dieser Satz ist schon vor Jahren von N. S. Kurnakov aufgestellt worden.

Gehen wir zur Analyse des allgemeinen Falles von Systemen über, deren Komponenten eine dissoziierte Verbindung bilden ($k > 0$).

Differenzierung von (1) nach $x$ ergibt

$$\frac{dz}{dx} = \frac{[x(z_A - z_B) + z_{AB} - z_A]\frac{dy}{dx} + (1-y)(z_A - z_B)}{(1-y)^2} \qquad (4)$$

und ferner

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{2(1-y)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dz}{dx} + [x(z_A - z_B) + z_{AB} - z_A]\frac{d^2y}{dx^2}}{(1-y)^2}. \quad (5)$$

Differenzierung von (2) nach $x$ ergibt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{2\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 - x + x^2}} \quad (6) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{k(k+2)}{4\left(\sqrt{\left(\frac{1+k}{2}\right)^2 - x + x^2}\right)^3} \quad (7)$$

Bei $x=0$, ist $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+k}$, (6′) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2k(k+2)}{(1+k)^3}$, (7′)

$$\frac{dz}{dx} = (z_{AB} - z_A)\frac{dy}{dx} + z_A - z_B = \frac{z_{AB} - z_B + k(z_A - z_B)}{1+k} \quad (4')$$

und

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2(z_{AB} - z_A)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(z_A - z_B)\frac{dy}{dx} + (z_{AB} - z_A)\frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$= \frac{2(z_{AB} - z_A)}{(1+k)^2} + \frac{2(z_A - z_B)}{1+k} - \frac{2k(k+2)(z_{AB} - z_A)}{(1+k)^3} = \quad (5')$$

$$= 2\frac{(z_{AB} - z_A)(1-k-k^2) + (z_A - z_B)(1+k)^2}{(1+k)^3}.$$

Bei $x=\frac{1}{2}$, ist $\frac{dy}{dx}=0$, (6″) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{\sqrt{k(k+2)}}$, (7″) $\frac{dz}{dx} = \frac{z_A - z_B}{1-y}$ (4″)

und

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(2z_{AB} - z_A - z_B)\frac{d^2y}{dx^2}}{2(1-y)^2} = \frac{z_A + z_B - 2z_{AB}}{(1-y)^2\sqrt{k(k+2)}} \quad (5'')$$

Bei $x=1$, ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+k}$, (6‴) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2k(k+2)}{(1+k)^3}$, (7‴)

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z_A - z_{AB} + k(z_A - z_{\ })}{1+k} \quad (4''')$$

und

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2\frac{(z_{AB} - z_B)(1-k-k^2) - (z_A - z_B)(1+k)^2}{(1+k)^3}. \quad (5''')$$

Wir wollen zwei Fälle betrachten: 1) Der Wert der Eigenschaft der entstehenden Verbindung erscheint im Verhältnis zu den entsprechenden Werten der Komponenten als extrem, d. h. entweder maximal oder aber minimal ($z_{AB} > z_A > z_B$ bzw. $z_{AB} < z_A < z_B$). 2) Die Eigenschaft der Verbindung wird durch eine intermediäre Wert gekennzeichnet ($z_A > z_{AB} > z_B$).

I. Erster Fall a) $z_{AB} \geqslant z_A \geqslant z_B$.

Bei $x=0$, ist $\frac{dz}{dx} > 0$; $\frac{d^2z}{dx^2} \geqslant 0$,

wenn $(z_{AB} - z_A)(1-k-k^2) + (z_A - z_B)(1+k)^2 \geqslant 0$,

d. h. $\frac{k^2+k-1}{(1+k)^2} \leqslant \frac{z_A - z_B}{z_{AB} - z_A}$; $\frac{d^2z}{dx^2} \leqslant 0$, wenn $\frac{k^2+k-1}{(1+k)^2} \leqslant \frac{z_A - z_B}{z_{AB} - z_A}$.

Bei $x=\frac{1}{2}$ ist, $\frac{dz}{dx} \geqslant 0$, $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$; $\underline{\frac{dz}{dx} = 0, \text{ wenn } z_A = z_B.}$

Bei $x=1$ ist, $\frac{dz}{dx} > 0$, wenn $z_A - z_B > -\frac{dy}{dx}(z_{AB} - z_B)$,

d. h. $k > \frac{z_{AB} - z_A}{z_A - z_B}$ $\underline{\frac{dz}{dx} > 0, \text{ wenn } z_{AB} = z_A.}$ $\frac{dz}{dx} < 0$,

wenn $k < \frac{z_{AB} - z_A}{z_A - z_B}$. $\frac{d^2z}{dx^2} \geqslant 0$, wenn $\frac{k^2 + k - 1}{(1+k)^2} \leqslant \frac{z_B - z_A}{z_{AB} - z_B}$

und $\frac{d^2z}{dx^2} \leqslant 0$, wenn $\frac{k^2 + k - 1}{(1+k)^2} \geqslant \frac{z_B - z_A}{z_{AB} - z_B}$

Wir sehen also, dass unser Diagramm bei den in Rede stehenden Grössenverhältnissen zwischen den Parametern sich als eine Kurve mit einem Maximum in dem der Komponente $A$ anliegenden Teil gestaltet, da nämlich der Differentialquotient $\frac{dz}{dx}$, welcher bei $x=0$ und $x=\frac{1}{2}$ positiv ist, sein Vorzeichen bei $x=1$ ändern kann. Da das Vorzeichen von $\frac{dz}{dx}$ sich im Bereich zwischen $x=\frac{1}{2}$ und $x=1$ verändert, so ist das Maximum nach der Seite der Komponente, welche durch den grösseren Wert der betreffenden Eigenschaft gekennzeichnet ist ($z_A > z_B$), verschoben.

Die Bedingung des Auftretens des Maximums besagt, dass letzteres bei um so höheren Werten von $k$ zustandekommt, je grösser die Differenz zwischen $z_{AB}$ und $z_A$ ist; mit anderen Worten, falls die Grösse der Eigenschaft der entstehenden Verbindung die entsprechenden Grössen der Komponenten stark übertrifft, so bleibt das Maximum auch bei sehr hohen $k$-Werten d. h. bei sehr bedeutendem Zerfall in einzelne Komponenten, erhalten. Stehen aber $z_A$ und $z_{AB}$ einander nahe, so bleibt das Maximum allein bei kleinen $k$-Werten erhalten. Im extremen Fall ($z_{AB} = z_A$) vermag das Maximum bei kleinen $k$-Werten aufzutreten. Ausser dem Maximum können auf der Kurve noch zwei Inflexionspunkte auftreten, da nämlich $\frac{d^2z}{dx^2}$, welcher bei $x=\frac{1}{2}$ negativ ist, bei $x=0$ und $x=1$ positiv werden kann. Aus den Bedingungen der Vorzeichenänderung von $\frac{d^2z}{dx^2}$ ergibt sich, dass die Inflexionspunkte um so leichter auftreten, je kleiner $k$ ist; unter diesen Umständen ist der Inflexionspunkt im Bereich zwischen $x=0$ und $x=\frac{1}{2}$ leichter erfüllbar. Ein Inflexionspunkt zwischen $x=\frac{1}{2}$ und $x=1$ ist dagegen nur bei sehr kleinen $k$-Werten möglich, also auf Diagrammen, welche sich dem singulären Typus nähern. Bei $z_{AB} = z_A$, d. h. bei Fehlen des Maximums, erhalten wir ein Diagramm blos mit einem einzigem Inflexionspunkt, und zwar in der ersten Hälfte, welcher unabhängig vom Werte von $k$ zustandekommt, da ja $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$ bei $x=0$ und $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$ bei $x=\frac{1}{2}$ und $x=1$.

Bei $z_A = z_B$ entspricht das Maximum $x=\frac{1}{2}$, d. h. der Zusammensetzung der Verbindung $AB$; die Lage des Maximums hängt von $k$ nicht ab. Die Bedingung des Inflexionspunkts wird in diesem Fall durch $k^2 + k - 1 \leqslant 0$ gegeben; das Diagramm ist völlig symmetrisch, wobei die Inflexionspunkte entweder in beiden Hälften auftreten oder gänzlich fehlen.

Ein derartiges Diagramm kann als rationell (nicht singulär) bezeichnet werden, weil das Maximum stöchiometrischen Verhältnissen zwischen den Komponenten (Zusammensetzung der gebildeten Verbindung) entspricht. Als Beispiele von rationalen Diagrammen mögen die Viskositäts-

diagramme der Systeme $SbBr_3 - CH(C_6H_5)_3$ [4] und $AsCl_3 - C_6H_5OCH_3$ [5] dienen. Was das Fehlen eines zweiten Inflexionspunkts auf den Viskositätsisothermen des ersteren Systems betrifft, so liegt es nahe zu denken, dass es vom Mangel an Messungen in dem $SbBr_3$ anliegenden Gebiete des Diagramms herrührt.

Gehen wir von der Eigenschaft, welche durch $z_A = z_B$ gekennzeichnet ist, zu einer anderen (unabhängigen) Eigenschaft über, so lässt es sich nicht erwarten, dass der rationale Diagrammtypus beibehalten wird.

b) $z_{AB} \leqslant z_A \leqslant z_B$. Dieser Fall unterscheidet sich vom obigen blos dadurch, dass statt des Maximums ein Minimum vorliegt.

c) $z_{AB} \geqslant z_B \geqslant z_A$ und $z_{AB} \leqslant z_B \leqslant z_A$ lassen sich auf a) und b) zurückführen, wobei linke und rechte Diagrammhälfte sich gegenseitig ersetzen.

II. Zweiter Fall. $z_A > z_{AB} > z_B$

$x = 0$, $\frac{dz}{dx} > 0$, $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$; $\quad x = \frac{1}{2}$, $\frac{dz}{dx} > 0$; $\frac{d^2z}{dx^2} > 0$,

wenn $z_{AB} < \frac{z_A + z_B}{2}$; $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$, $\quad$ wenn $z_{AB} > \frac{z_A + z_B}{2}$.

$\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, wenn $z_{AB} = \frac{z_A + z_B}{2}$. $\quad x = 1$, $\frac{dz}{dx} > 0$, $\frac{d^2z}{dx^2} < 0$.

Es ergibt sich also, dass bei $z_A > z_{AB} > z_B$, unabhängig vom $k$-Wert, ein Diagramm mit einem Inflexionspunkt im Bereich zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ auftritt, falls $z_{AB} > \frac{z_A + z_B}{2}$, und zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$, falls

$$z_{AB} < \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Als Beispiele von derartigen Diagrammen mögen die Viskositätsdiagramme der Systeme $AsCl_3 - (C_2H_5)_2O$ [6] und $H_2SO_4 - C_6H_5NO_2$ [7] dienen. Bei

$$z_{AB} = \frac{z_A + z_B}{2}$$

entfällt der Inflexionspunkt auf $x = \frac{1}{2}$; es sind also rationale (nicht singuläre) Diagramme möglich, für welche der Inflexionspunkt ein singulärer Punkt ist.

Eingegangen
d. 14. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Dolezalek u. Schulze. ZS. phys. Ch., 83, 45, 1913. [2] Drucker. ZS. phys. Ch., 92, 287, 1917. [3] Аносов. Изв. Пермск. биол. научно-иссл. инст., 6, 479, 1929. Anosov Mitt. des biol. Forschungsinst. in Perm, 6, 1929, 479. [4] Kurnakov. ZS. anorg. allg. Chem., 125, 81, 1924. [5] Шульгина. Журн. общ. хим., 4. 222, 1934. Sulgina. Journ. f. allg. Chemie, 4, 1934. 202. [6] Терпугов. Журн. общ. хим., 2, 868, 1932. Terpugov. Journ. f. allg. Chemie, 2, 1932, 868. [7] Усанович, Козьмина и Тартаковская (печатается). Usanovič, Kozmina u. Tartakovskaja (in Druck).

П. П. ПОРФИРОВ

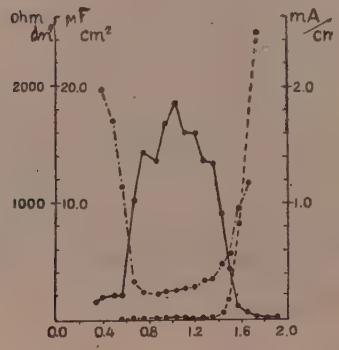
# К ВОПРОСУ ВОДОРОДНОГО ПЕРЕНАПРЯЖЕНИЯ

(*Представлено академиком В. А. Кистяковским 22 V 1934*)

Работа является попыткой решения разногласий по вопросу существования на катоде, при выделении водорода, так называемого переходного сопротивления (1).

В настоящей работе исходят из предположения, что катод, покрытый пленкой газа, создающей переходное сопротивление, электрически эквивалентен конденсатору с параллельно включенным сопротивлением.

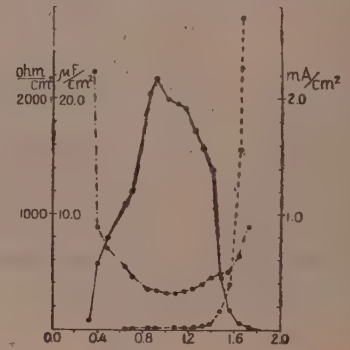
Электролит $2n$ $H_2SO_4$




Потенциал катода в вольтах
Cathode potential in volts

Фиг. 1. — Fig. 1.

Электролит $n$ $H_2SO_4$




Потенциал катода в вольтах
Cathode potential in volts

Фиг. 2. — Fig. 2.

—— сопротивление пленки. ------ емкость пленки. - - - - плотность тока.
—— film resistance. ------ film capacity. - - - - current density.

Омическое сопротивление электролита и общее сопротивление (омическое и емкостное) пленки газа на платинированном аноде не велики и во внимание не принимались. Переходное сопротивление измерялось с помощью переменного тока весьма малой силы ($1.10^{-4}$—$5.10^{-5}$ А), наложенного на поляризующий постоянный ток (2). Измерение производилось методом замещения, с применением лампового вольтметра (с двумя каскадами предварительного усиления), в качестве указателя напряжения переменного тока на ванне. Полученные величины представляли собой общее или кажущееся сопротивление (омическое и емкостное) пленки. Каждое измерение производилось дважды, с помощью переменного тока двух различных частот (25 и 1000 периодов в секунду). Величины омического сопротивления ($r$) и емкости ($C$) пленки вычислялись из известных уравнений для конденсатора, обладающего утечкой,

$$\frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{r^2} + (2\pi f_1 C)^2, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{z_2^2} = \frac{1}{r^2} + (2\pi f_2 C)^2, \qquad (2)$$

где $f_1$ — 25 периодов; $f_2$ — 1000 периодов, $z_1$ — полное сопротивление, измеренное при 25 периодах, $z_2$ — полное сопротивление, измеренное при 1000 периодах, $C$ — емкость пленки, $r$ — омическое сопротивление пленки.

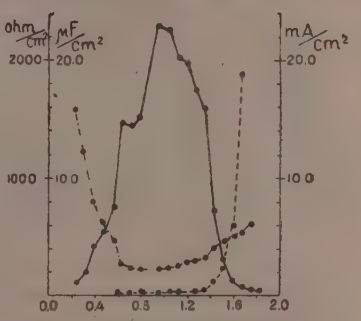
Было сделано допущение, что диэлектрическая постоянная газа, образующего пленку, равна единице, и с помощью обычной формулы для емкости плоского конденсатора подсчитана толщина этой пленки (толщина диэлектрика).

Одновременно с измерением переходного сопротивления производилось построение кривых потенциал — плотность тока.*

В качестве катода в опытах применена ртуть, очищенная взбалтыванием с азотнокислой закисью ртути. Анод — платинированная платина. Электролит — растворы серной кислоты различных концентраций ($2n$, $n$ и $0.1n$). Предварительного насыщения электролита водородом не производилось.

Приводим в сокращенном виде результаты трех опытов.

Электролит $^1/_{10}$ $n$ $H_2SO_4$




Фиг. 3. — Fig. 3.

Объяснение см. фиг 1.
Explanation see Fig. 1.

Таблица 1 — Table 1

Электролит $2n \cdot H_2SO_4$
Electrolyte $2n \cdot H_2SO_4$

| Потенциал катода Cathode potential V | Плотность тока mA/см² Current density mA/cm² | Переходное сопротивление ом, см² измеренное током Contact resistance in ohm/cm² measured with current: 25 периодов в сек. 25 cycles per sec. | Переходное сопротивление ом, см² измеренное током Contact resistance in ohm/cm² measured with current: 1000 периодов в сек. 1000 cycles per sec. | Данные, расчитанные из измеренных величин Data calculated from the measured values: Сопротивление ом/см² Resistance ohm/cm² | Данные, расчитанные из измеренных величин Data calculated from the measured values: Емкость µF/см² Capacity µF/cm² | Кажущаяся толщина слоя диэлектрика $10^{-8}$ см Apparent thickness of the dielectric film $10^{-8}$ cm | Удельное сопротивление диэлектрика $10^8$ ом/см³ Specific resistance of the dielectric $10^8$ ohm/cm³ | Падение напряжения на переходном сопротивлении Potential drop in contact resistance in V | Градиент потенциала $10^6$ V/см Potential gradient $10^6$ V/cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0.099 | 0.0015 | 66.8 | 2.3 | — | — | — | — | — | — |
| 0.400 | 0.0082 | 167.0 | 8.0 | 195 | 19.9 | 0.45 | 433 | 0.002 | 0.45 |
| 0.497 | 0.0091 | 187.0 | 9.3 | 217 | 17.1 | 0.52 | 418 | 0.002 | 0.38 |
| 0.676 | 0.0136 | 910 | 48.5 | 1030 | 3.28 | 2.7 | 380 | 0.014 | 0.52 |
| 0.875 | 0.0136 | 1260 | 68.5 | 1370 | 2.32 | 3.82 | 360 | 0.015 | 0.39 |
| 1.034 | 0.0106 | 1520 | 58.5 | 1850 | 2.72 | 3.26 | 570 | 0.019 | 0.58 |
| 1.194 | 0.0128 | 1290 | 54.3 | 1600 | 2.92 | 3.08 | 530 | 0.021 | 0.66 |
| 1.275 | 0.0151 | 1110 | 47.0 | 1370 | 3.89 | 2.61 | 525 | 0.021 | 0.81 |
| 1.492 | 0.174 | 410 | 27.8 | 440 | 5.70 | 1.55 | 284 | 0.0775 | 5.00 |
| 1.650 | 0.9050 | 66.3 | 13.2 | 66.8 | 11.8 | 0.75 | 89 | 0.067 | 8.15 |
| 1.730 | 2.460 | 26.5 | 11.9 | 26.5 | 11.9 | 0.74 | 35.8 | 0.065 | 8.80 |
| 1.890 | 12.70 | 13.2 | 6.6 | 13.2 | 20.6 | 0.43 | 30.7 | 0.167 | 38.2 |

* Потенциал измерен по отношению к электроду $Hg/Hg_2SO_4 \cdot nH_2SO_4$.

Таблица 2 — Table 2

Электролит $2n \cdot H_2SO_4$
Electrolyte $2n \cdot H_2SO_4$

| Потенциал катода Cathode potential V | Плотность тока mA/cm² Current density mA/cm² | Переходное сопротивление ом/см², измеренное токои Contact resistance in ohm/cm² measured with current | | Данные, рассчитанные из измеренных величин Data calculated from the measured values | | Кажущаяся толщина слоя диэлектрика 10⁻⁸ см Apparent thickness of the dielectric film 10⁻⁸ cm | Удельное сопротивление диэлектрика 10⁶ ом/см³ Specific resistance of the dielectric 10⁶ ohm/cm³ | Падение напряжения на переходном сопротивлении Potential drop in contact resistance in V | Градиент потенциала 10⁶ V/cm Potential gradient 10⁶ V/cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 25 периодов в сек. 25 cycles per sec. | 1000 периодов в сек. 1000 cycles per sec. | Сопротивление ом/см² Resistance ohm/cm² | Ёмкость μF/см² Capacity μF/cm² | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0.094 | 0.0015 | 37.1 | 3.5 | — | — | — | — | — | — |
| 0.398 | 0.0075 | 456 | 17.8 | 594 | 8.93 | 0.99 | 600 | 0.0044 | 0.44 |
| 0.637 | 0.0045 | 790 | 28.5 | 1095 | 5.58 | 1.58 | 694 | 0.0049 | 0.31 |
| 0.915 | 0.0045 | 1380 | 45.7 | 2180 | 3.48 | 2.54 | 860 | 0.0098 | 0.39 |
| 1.075 | 0.0143 | 1390 | 49.0 | 1970 | 3.25 | 2.72 | 725 | 0.0282 | 1.04 |
| 1.230 | 0.0242 | 1220 | 43.0 | 1740 | 3.70 | 2.39 | 730 | 0.0420 | 1.76 |
| 1.390 | 0.0453 | 990 | 34.5 | 1410 | 4.61 | 1.92 | 735 | 0.063 | 3.28 |
| 1.470 | 0.166 | 444 | 31.8 | 473 | 4.98 | 1.78 | 268 | 0.078 | 4.88 |
| 1.554 | 0.407 | 172 | 29.0 | 175 | 5.18 | 1.71 | 102 | 0.071 | 4.15 |
| 1.633 | 1.590 | 53.0 | 21.2 | 53.1 | 6.88 | 1.29 | 41 | 0.084 | 6.50 |
| 1.713 | 3.40 | 22.5 | 13.9 | 22.5 | 8.98 | 0.98 | 23 | 0.0765 | 7.80 |
| 1.792 | 6.19 | 13.9 | 11.3 | 13.9 | 3.36 | 1.06 | 13 | 0.086 | 8.10 |

При увеличении катодного потенциала величина переходного сопротивления быстро увеличивается, достигая максимума при потенциале около вольта и затем быстро уменьшается до весьма малой величины. Емкость сначала быстро уменьшается до 3—4μF см², остается некоторое время почти постоянной и затем начинает несколько увеличиваться.

Быстрое уменьшение переходного сопротивления совпадает с увеличением силы тока на кривой плотность тока — потенциал. Зависимость между плотностью тока и потенциалом катода имеет свой обычный характер.

Обращают на себя внимание большие значения величин емкости, полученные при малой катодной поляризации. Толщина пленки (слоя диэлектрика), расчитанная из этих величин, значительно меньше мономолекулярной. Повидимому, в этом случае молекулы водорода покрывают только часть поверхности ртути, и вычисленная толщина является средней между толщиной слоя молекул водорода и толщиной электрического двойного слоя. Эта кажущаяся толщина (графа 7) приближается к действительной толщине водородной пленки только при малых значениях емкости.

В графе 9 таблиц приведены величины водородного перенапряжения, подсчитанные из результатов, полученных для омического сопротивления пленки и плотности тока.

Таблица 3 — Table 3

Электролит $0.1n \cdot H_2SO_4$
Electrolyte $0.1n \cdot H_2SO_4$

| Потенциал катода Cathode potential V | Плотность тока mA/см² Current density mA/cm² | Переходное сопротивление ом/см, измеренное током Contact resistance in ohm/cm measured with current | | Данные, рассчитанные из измеренных величин Data calculated from the measured values | | Кажущаяся толщина слоя диэлектрика $10^{-8}$ см Apparent thickness of the dielectric film $10^{-8}$ cm | Удельное сопротивление диэлектрика $10^8$ ом/см³ Specific resistance of the dielectric $10^8$ ohm/cm³ | Падение напряжения на переходном сопротивлении Potential drop in contact resistance in V | Градиент потенциала $10^6$ V/cm Potential gradient $10^6$ V/cm |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 25 периодов в сек. 25 cycles per sec. | 1000 периодов в сек. 1000 cycles per sec. | Сопротивление ом/см² Resistance ohm/cm² | Емкость μF/см² Capacity μF/cm² | | | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0.080 | 0.0015 | 69.0 | 8.7 | — | — | — | — | — | — |
| 0.318 | 0.0045 | 186 | 12.9 | 200 | 12.8 | 0.72 | 278 | 0.001 | 0.14 |
| 0.478 | 0.0067 | 497 | 25.8 | 567 | 6.16 | 1.43 | 396 | 0.004 | 0.28 |
| 0.636 | 0.0053 | 1240 | 56.4 | 1480 | 2.82 | 3.14 | 472 | 0.007 | 0.22 |
| 0.955 | 0.0045 | 1790 | 71.0 | 2310 | 2.24 | 3.95 | 585 | 0.011 | 0.28 |
| 1.115 | 0.0075 | 1550 | 60.5 | 2020 | 2.63 | 3.36 | 600 | 0.015 | 0.45 |
| 1.273 | 0.0211 | 1380 | 51.0 | 1750 | 3.12 | 2.84 | 560 | 0.037 | 1.30 |
| 1.432 | 0.110 | 635 | 40.0 | 720 | 3.97 | 2.23 | 323 | 0.079 | 3.55 |
| 1.510 | 0.226 | 298 | 33.2 | 306 | 4.76 | 1.85 | 165 | 0.068 | 3.68 |
| 1.592 | 0.605 | 119 | 29.2 | 125 | 5.26 | 1.69 | 74 | 0.076 | 4.50 |
| 1.750 | 2.94 | 41.7 | 21.9 | 42 | 6.15 | 1.44 | 29.2 | 0.124 | 8.6 |
| 1.830 | 5.35 | 31.2 | 20.5 | 31.5 | 5.84 | 1.52 | 20.7 | 0.170 | 11.2 |

Очевидно, что полученные таким образом величины перенапряжения (обязанные существованию переходного сопротивления) не превышают 10—20% величин, получаемых прямым методом.

Предполагается следующий механизм протекания процесса. На поверхности ртутного катода, при незначительной катодной поляризации, начинается образование пленки водорода, создающей переходное сопротивление. По мере увеличения катодного потенциала средняя толщина этой пленки непрерывно растет, вместе с тем повышается и переходное сопротивление. Удельное сопротивление водорода, образующего пленку, в этом случае остается постоянным (графа 8).

По достижении максимальной величины переходного сопротивления, начинается увеличение проводимости газа, образующего пленку, и уменьшения ее толщины, что является результатом высокого градиента потенциала на пленке, достигающего $10^7$ V/см (графа 10).

Весьма вероятно, что уменьшение толщины газовой пленки только кажущееся и обязано увеличению диэлектрической постоянной газа при увеличении его проводимости.

Полученные результаты обладают полной повторимостью в отношении общего характера процесса, но абсолютные величины сопротивления и емкости не вполне устойчивы (как и обычно при изучении перенапряжения).

Достижение более постоянных результатов и более точное определение толщины пленки водорода является задачей дальнейших опытов.

Работа позволяет сделать следующие выводы:

1) Существование переходного сопротивления на ртутном катоде несомненно.

2) Переходное сопротивление не является единственной причиной водородного перенапряжения.

3) Образование пленки водорода, дающей переходное сопротивление, начинается при весьма малой катодной поляризации.

4) При увеличении плотности постоянного тока происходит уменьшение величины переходного сопротивления.

5) Максимум сопротивления пленки соответствует началу увеличения силы тока на кривой плотность тока — потенциал.

В заключение считаю своим долгом выразить глубокую благодарность акад. В. А. Кистяковскому, своими советами способствовавшему выполнению настоящей работы.

Лаборатория физической химии
Научно-исследовательского института
механической обработки полезных
ископаемых. Ленинград.

Поступило
8 IX 1934.

---

*PHYSICAL CHEMISTRY*

## ON THE PROBLEM OF HYDROGEN OVERVOLTAGE

By P. PORFIROV

(*Communicated by V. A. Kistiakovskij, Member of the Academy, 22. V. 1934*)

This work is an attempt to settle the controversy about the existence of the so-called contact (or transfer) resistance on the cathode during the evolution of hydrogen (1).

This work is based on the assumption that the cathode covered by a gas film creating the contact resistance is electrically equivalent to a condenser connected in parallel with a resistance.

The ohmic resistance of the electrolyte and the total resistance of the gas film on the platinized anode are not large and were not taken into consideration. The contact resistance was measured by the method of alternating current of very low strength ($1.10^{-4} — 5.10^{-5}$ A) superposed on a direct polarizing current (2). Measurements were made by the method of substitution, a valve voltmeter being used as an indicator of the alternating current potential in the electrolytic cell.

The values obtained represented the total or apparent resistance of the film.

Each measurement was performed twice by means of alternating current of two different frequencies (25 and 1000 cycles per second). The val-

ues of ohmic resistance ($r$) and of capacity ($C$) of the film were caclulated by means of the well known formulae for condensers with leakage:

$$\frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{r^2} + (2\pi f_1 C)^2, \quad (1)$$

$$\frac{1}{z_2^2} = \frac{1}{r^2} + (2\pi f_2 C)^2, \quad (2)$$

where $f_1$ is 25 cycles per second, $f_2$ is 1000 cycles per second, $z_1$ is total resistance measured at 25 cycles, $z_2$ is total resistance measured at 1000 cycles, $C$ is capacity of the film, and $r$ is ohmic resistance of the film.

The assumption was made that the dielectric constant of the gas forming the film is equal to a unity, and the thickness of this film (thickness of the dielectric) was calculated by means of the usual formula for flat condensers.

Simultaneously with the measurement of the contact resistance, potential — current density curves were plotted.*

Mercury purified by shaking with mercurous nitrate was used as the cathode in these experiments. The anode was platinized platinium, the electrolyte, solutions of sulphuric acid of different concentrations ($2n$, $n$, and $0.1n$).

There was no preliminary saturation of the electrolyte with hydrogen.

We give an abridged tabulated summary of the results of the experiments (see Tables 1—3, pp. 387—389).

On increasing the cathode potential the magnitude of the contact resistance rapidly increases, reaching its maximum at a potential of approximately one volt and then rapidly decreasing to a very low value. Capacity first rapidly drops to 3 or 4 $\mu F/cm^2$, remains almost constant for some time, and then somewhat increases.

A rapid drop of the contact resistance coincides with an increase in the strength of the current in the potential — current density curve. The relation between current density and cathode potential is of the usual type.

Attention should be called to the high capacity values at low cathode polarization. The thickness of the film (dielectric layer) calculated from these values is considerably less than that of a monomolecular layer. It would seem that in such cases hydrogen molecules cover only part of the surface of the mercury, and the calculated thickness is the mean of the thickness of the layer of hydrogen molecules and that of the electric double layer. This apparent thickness (column 7 of the tables) approximates the actual thickness of the hydrogen film only at low capacity values.

Column 9 contains the values of hydrogen overvoltage calculated from the results obtained for the ohmic resistance of the film and the current density.

It appears that the overvoltage values thus obtained (i. e. due to the existence of contact resistance) do not exceed 10 to 20 per cent of those obtained by direct method.

The following is conceived to be the mechanism of this process. On the surface of the mercury cathode with a low cathode polarization, there forms a hydrogen film creating contact resistance. With the increase in

* The potential was determined with regard to the electrode $Hg/Hg_2SO_4 \cdot n\,H_2SO_4$.

cathode potential the average thickness of this film continually increases, and so does the contact resistance. The specific resistance of the hydrogen that forms the film remains in such case constant (column 8).

The maximum value of the contact resistance being reached, the conductivity of the gas forming the film begins to increase, and its thickness begins to decrease as a result of the high potential gradient on the film (up to $10^7$ V/cm, column 10).

It is very probable that the decrease in the thickness of the gas film is only apparent and is due to an increase in the dielectric constant of the gas with the increase in its conductivity.

The results obtained are entirely reproducible as regards the general character of the process, but the absolute values of resistance and capacity are not quite stable (as is usual in studies of overvoltage).

Further experiments should give more constant results and more accurate determinations of the thickness of the hydrogen film.

The following conclusions may be drawn from these investigations:

1) The existence of contact resistance on a mercury cathode is beyond doubt.

2) This contact resistance is not the only cause of hydrogen overvoltage.

3) The formation of a hydrogen film causing the contact resistance begins at a very low cathode polarization.

4) The contact resistance decreases with the increase in the direct current density.

5) The maximum resistance of the film coincides with the beginning of the increase in the strength of the current in the potential — current density curve.

In conclusion I consider it my duty to express my deep gratitude to V. A. Kistiakovskij, Member of the Academy, for his most helpful advice.

Laboratory of Physical Chemistry,
Institute of Ore Dressing.
Leningrad.

Received
8. IX. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] E. Newbery. Proc. Roy. Soc. A, vol. 119, № 783, — A. Ferguson. Journ. Phys. Chem., vol. 36, № 4. — Holler. Bureau of Stand. Scient. Paper № 504, Washington, 1924. [2] П. Порфиров. Материалы по обогащению полевых ископаемых. Работы отд. научн. изыск. Ленинград, 1930, стр. 195; ЖОХ, том 3, вып. 5, 1933 стр. 590; Записки Ленингр. горного инст., том 8, стр, 215. L. P. Porfirov. Data on Concentration of Field Minerals. Publ. Dept Sci. Research. Leningrad, 1930, p. 195; Journ. Gen. Chem., vol. 3, No 5, 1933, p. 590; Trans. Leningrad Mining Inst., vol. 8, p. 215.

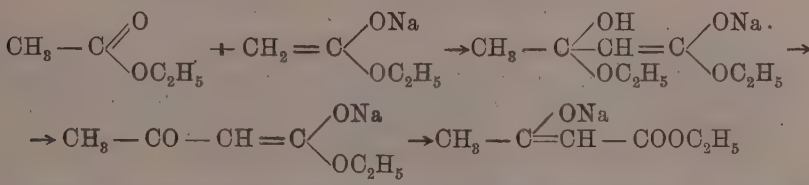
Г. В. ЧЕЛИНЦЕВ

# О МЕХАНИЗМЕ КОНДЕНСАЦИЙ КАРБОНИЛЬНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ПОД ВЛИЯНИЕМ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ

(*Представлено академиком А. Е. Фаворским 9 I 1935*)

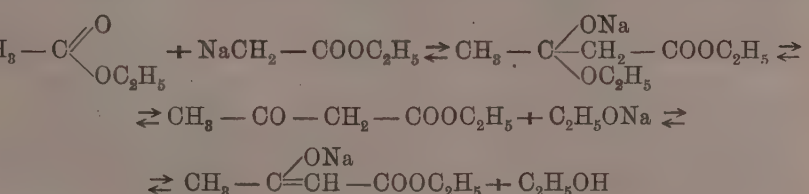
В моей работе „О механизме сложно-эфирных конденсаций“ (1) была предложена схема этого процесса, имеющая ряд преимуществ перед прежними гипотезами:

I



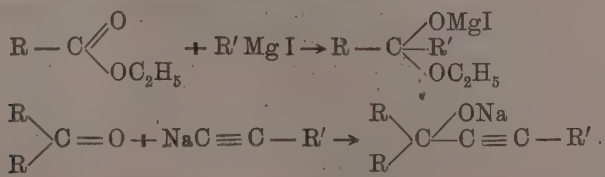
Металлсодержащая компонента была принята в этой схеме в энолятном строении, что находилось в соответствии с фактом неспособности эфиров типа $\begin{matrix}R\\R\end{matrix}\!\!>\!CH-COOC_2H_5$ служить вторыми компонентами конденсации (2). Дальнейшее изучение вопроса о механизме конденсаций карбонильных соединений под влиянием щелочных металлов и их водоразлагаемых производных, привело меня к выводу что сложно-эфирные конденсации протекают по схеме II, причем металлсодержащая компонента реагирует в виде таутомерного металлоорганического соединения:

II



Механизм конденсации аналогичен синтезам карбонильных соединений с металлоорганическими соединениями магния, цинка или натрия, которые всегда характеризуются промежуточной стадией присоединения металлоорганического соединения к карбонильной группе:

III



Наглядным доказательством правильности схемы II являются конденсации альдегидов и кетонов с α-хлорзамещенными кетонами, сложными

эфирами и др. веществами, протекающие в условиях сложно-эфирных конденсаций и приводящие к образованию глицидных соединений.

Гипотезы Эрленмейера (3), Клайсена (4) и Бодфорса (5) о механизме этих реакций построены или на маловероятных промежуточных превращениях или не отвечают требованиям условий экспериментов. Механизм этих реакций должен быть выражен такой схемой (аналогична II):

$$C_6H_5-CH=O+NaCHCl-COOC_2H_5 \rightleftarrows C_6H_5-\overset{\overset{ONa}{|}}{CH}-CHCl-COOC_2H_5 \rightarrow$$

IV

$$\rightarrow C_6H_5-\overset{\overset{O}{\diagup\diagdown}}{CH}-CH-COOC_2H_5 + NaCl$$

Непригодность схемы I для объяснения механизма этих реакций следует уже из того что вторыми компонентами в них могут служить α-хлорпропионовый эфир (9) или паранитробензальхлорид (7).

Неспособность эфиров типа $\begin{matrix} R \\ R \end{matrix}\!\!>\!CH-COOC_2H_5$ служить второй компонентой сложно-эфирных конденсаций находит свое разрешение в схеме II, на основе исследований Дикмана об обратимости сложно-эфирных конденсаций. Положение последнего равновесия схемы II зависит от кислых свойств конденсированной молекулы по отношению к спирту. Продукт конденсации изомасляного эфира на себя, нейтрален по своему характеру и не может образовать неразлагаемого спиртом натрового производного при действии алкоголята; наоборот: готовый изобутирил-изомасляный эфир нацело расщепляется на компоненты уже при каталитическом воздействии алкоголята натрия в спиртовом растворе. Чем кислее конденсированная молекула, тем с лучшими выходами протекают конденсации. Из схемы II ясно значение большего или меньшего количества спирта в реакционной смеси (9) и его кислого характера (10) для хода реакции. Значение этих факторов усугубляется равновесием:

$$CH_2Na-COOC_2H_5 + C_2H_5OH \rightleftarrows CH_3-COOC_2H_5 + C_2H_5ONa$$

Схема II делает понятной слабую способность натрмалонового и натрацетоуксусного эфиров служить вторыми компонентами конденсаций, факт, необъяснимый с точки зрения схемы I и других гипотез; С-металлическое производное превращается в этих случаях в О-производное путем „внутримолекулярной конденсации“, протекающей предпочтительно, благодаря кислому характеру малонового и ацетоуксусного эфиров.

Схема II позволяет определить факторы, от которых зависит предпочтительное направление реакции при конденсации двух различных веществ, способных служить по своему строению как первой, так и второй компонентой. Важнейшим фактором является сравнительно кислый характер компонент, которым определяется способность образовывать металлоорганическое соединение. Второй фактор — сравнительно кислый характер возможных конденсированных молекул, которым определяется большая или меньшая обратимость конденсации.

Аналогично механизмам, выраженным схемами II, III, IV, протекают многочисленные и разнообразные конденсации карбонильных соединений с веществами, способными образовывать С-металлические производные

под влиянием щелочных металлов или их водоразлагаемых производных. Такими веществами являются кетоны, сложные эфиры, их α-галоидопроизводные, нитросоединения типа нитрометана или паранитротолуола, хинальдин, флуорен, бензилцианид, трифенилметан и т. п.

Все эти реакции должны рассматриваться в ряду синтезов с металлоорганическими соединениями. В этом смысле вопрос о механизме сложноэфирных и им подобных конденсаций получает свое окончательное разрешение в пределах возможностей структурной теории.

Лаборатория по изучению и синтезу
растительных и животных веществ.
Академия Наук СССР.
Москва.

Поступило
9 I 1935.

---

*CHEMIE*

## ÜBER DEN MECHANISMUS DER UNTER DEM EINFLUSS VON ALKALIMETALLEN HERVORGERUFENEN KONDENSATIONEN DER KARBONYLVERBINDUNGEN

Von G. W. ČELINCEV (TSCHELINTZEFF)

(*Vorgelegt von A. Favorskij, Mitglied der Akademie, d. 9. I. 1935*)

In meiner Arbeit „Über den Mechanismus der Esterkondensationen“ (1) war ein Schema dieses Vorganges vorgeschlagen, welches vor den früheren Hypothesen eine Reihe von Vorzügen hatte:

I
$$CH_3-C\begin{matrix}=O\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix} + CH_2=C\begin{matrix}\diagup ONa\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix} \rightarrow CH_3-C\begin{matrix}\diagup OH\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix}-CH=C\begin{matrix}\diagup ONa\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix} \rightarrow$$
$$\rightarrow CH_3-CO-CH=C\begin{matrix}\diagup ONa\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix} \rightarrow CH_3-C\begin{matrix}=ONa\\ \diagdown\end{matrix}CH-COOC_2H_5$$

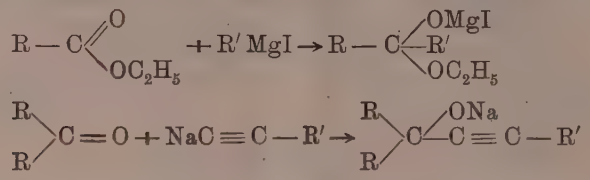
In diesem Schema wurde angenommen, dass der metallhaltigen Komponente die Enolatstruktur zukommt, was mit der Tatsache im Einklange stand, dass Ester vom Typus $\begin{matrix}R\\ R\end{matrix}\!\!\diagup\!\!\diagdown CH-COOC_2H_5$ nicht fähig sind, bei Kondensationen die Rolle der zweiten Komponenten zu übernehmen (2).

Das weitere Studium des Mechanismus der Kondensationen der Karbonylverbindungen, die unter dem Einfluss von Alkalimetallen und ihren durch Wasser zersetzbaren Abkömmlingen stattfinden, führten mich zum Schluss, dass die Esterkondensationen nach Schema II verlaufen, wobei die metallhaltige Komponente als tautomere metallorganische Verbindung reagiert:

II
$$CH_3-C\begin{matrix}=O\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix} + NaCH_2-COOC_2H_5 \rightleftarrows CH_3-C\begin{matrix}\diagup ONa\\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix}CH_2-COOC_2H_5 \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows CH_3-CO-CH_2-COOC_2H_5 + C_2H_5ONa \rightleftarrows$$
$$\rightleftarrows CH_3-C\begin{matrix}=ONa\\ \diagdown\end{matrix}CH-COOC_2H_5 + C_2H_5OH$$

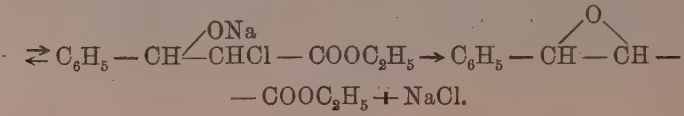
Der Mechanismus der Kondensation ist den mit Hilfe von metallorganischen Verbindungen des Zinks, Magnesiums oder Natriums eingeleiteten Synthesen der Karbonylverbindungen analog; diese Synthesen sind stets durch das Auftreten einer Zwischenstufe gekennzeichnet, die in der Anlagerung der metallorganischen Verbindung an die Karbonylgruppe besteht:

III

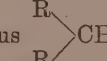


Einen schlagenden Beweis für die Richtigkeit des Schemas II liefern die Kondensationen der Aldehyde und Ketone mit α-chlorsubstituierten Ketonen, Estern und anderen Stoffen; diese Kondensationen verlbufen unter Bedingungen, wie sie für die Esterkondensationen charakteristisch sind, und führen zur Bildung von Glyzidverbindungen. Die Hypothesen von Erlenmeyer ([3]), Claisen ([4]) und Bodfors ([5]) über den Mechanismus dieser Reaktionen beruhen entweder auf der Existenz von wenig wahrscheinlichen Zwischenumwandlungen, oder aber sie entsprechen nicht den Anforderungen der Versuchsbedingungen. Der Mechanismus dieser Reaktionen muss durch folgendes Schema (welches dem Schema II analog ist) ausgedrückt werden:

IV



Dass Schema I nicht für die Erklärung des Mechanismus dieser Reaktionen geeignet ist, geht schon daraus hervor, dass bei ihnen als zweite Komponenten α-Chlorpropionäther ([6]) oder *p*-Nitrobenzolchlorid ([7]) dienen können.

Die Unfähigkeit der Ester vom Typus  als zweite Komponente bei Esterkondensationen zu dienen, findet ihre Erklärung im Schema II, und zwar auf Grund der Untersuchungen von Dieckmann über die Reversibilität der Esterkondensationen. Die Lage des letzten Gleichgewichtszustandes im Schema II hängt von den sauren Eigenschaften des kondensierten Moleküls im Verhältnis zum Alkohol ab. Das Produkt der Eigenkondensation des isobuttersauren Esters ist seinem Charakter nach neutral und nicht imstande, bei Einwirkung von Alkoholat ein durch Alkohol unzerlegbares Natriumderivat zu bilden; dagegen wird der fertige isobutyril-isobuttersaure Ester schon bei katalytischer Einwirkung von Natriumalkoholat in Alkohollösung glatt in die Komponenten gespalten. Je saurer das kondensierte Molekül ist, umso bessere Ausbeuten ergeben sich bei der Kondensation. Aus dem Schema ist die Bedeutung eines gewissen Alkoholgehaltes im Reaktionsgemisch ([9]) wie auch des sauren Cha-

rakters desselben ([10]) für den Verlauf der Reaktion klar ersichtlich. Die Bedeutung dieser Faktoren wird noch durch das Gleichgewicht

$$CH_2Na — COOC_2H_5 + C_2H_5OH \rightleftarrows CH_3 — COOC_2H_5 + C_2H_5ONa$$

verschärft.

Aus Schema II ist verständlich, weshalb der natronmalonsaure wie auch der natronazetoessigsaure Ester nur in geringem Masse befähigt sind, als zweite Komponenten bei Kondensationen zu dienen, — eine Tatsache, die durch Schema I und andere Hypothesen nicht erklärt werden kann: das C-Metallderivat wandelt sich in diesen Fällen in ein O-Derivat um, und zwar durch „intramolekulare Kondensation", die infolge des sauren Charakters der Ester der Malon- und Azetoessigsäure in bevorzugter Weise verläuft.

Durch Schema II lassen sich die Faktoren bestimmen, von denen die bevorzugte Richtung der Reaktion bei Kondensationen zweier verschiedener Stoffe abhängt, die nach ihrer Struktur geeignet sind, sowohl als erste wie auch als zweite Komponenten zu dienen. Der wichtigste Faktor ist der relativ saure Charakter derjenigen Komponente, die die Fähigkeit, metallorganische Verbindungen zu bilden, bedingt. Der zweite Faktor ist der relativ saure Charakter der eventuell entstehenden Moleküle, durch welchen eine grössere oder geringere Reversibilität der Kondensationen bedingt wird.

Analog den durch die Schemen II, III, IV veranschaulichten Mechanismen verlaufen die zahlreichen und verschiedenen Kondensationen der Karbonylverbindungen mit Stoffen, die unter dem Einfluss von Alkalime, tallen oder ihren durch Wasser zerlegbaren Derivaten befähigt sind C-Metallderivate zu bilden. Zu solchen Stoffen gehören Ketone, Ester, ihre α-Halogenderivate, Nitroverbindungen vom Typus des Nitromethans oder *p*-Nitrotoluols, Chinaldin, Fluoren, Benzylzyanid, Triphenylmethan u. dgl.

Alle diese Reaktionen müsste man zusammen mit den Synthesen behandeln, die mit Hilfe metallorganischer Verbindungen erzielt werden. In diesem Sinne erhält — im Bereiche der Möglichkeiten der Strukturtheorie — auch die Frage nach dem Mechanismus der Kondensationen bei Estern und ihnen ähnlichen Verbindungen ihre endgültige Entscheidung.

Laboratorium für Erforschung und Synthese
pflanzlicher und tierischer Stoffe.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Moskau.

Eingegangen
d. 9. I. 1935.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] B. 67, 955 (1934). — ЖОХ, IV, 800 (1934). Journ. d. R. Chem. Ges., IV, 800 (1934). — ДАН, 1934, т. II, стр. 477. C. R. Acad. Sci. URSS, 1934, vol. II, p. 481. [2] Wislicenus. Z. A. 246, 339 (1888). — Mc. Elvain. J. Am. Chem. Soc., 51, 3124 (1929). [3] A., 271, 161 (1892). [4] B. 38. 701 (1905). [5] B., 51, 194 (1918). [6] Larzens. C. R., 141. 766 (1905). [7] Barrow u. a. Inaug.-Diss. Strassburg i. E. 1909 u. 1911. [8] B. 33, 2670 (1900); 41, 1260 (1908). [9] Mc Elvain. J. Am. Chem. Soc. 51, 3124 (1929). [10] Mc Elvain. J. Am. Chem. Soc., 56, 1766 (1934).

И. КАНАЕВ

# О ВЛИЯНИИ ВИТАЛЬНЫХ КРАСОК НА ТРИХОДИН

(*Представлено академиком А. А. Рихтером 1 XII 1934*)

Во время моих опытов с прижизненной окраской гидр (*Pelmatohydra oligactis* Pall.) я заметил, что паразитирующие на теле гидр инфузории триходины (*Trichodina domergii*?) легко погибают в незначительных концентрациях витальных красок, в которых гидры благополучно живут.

Исследование производилось тремя красками: метиленовой синью, нильблаусульфат и нейтральрот. Я испробовал названные краски в различной концентрации и выяснил их влияния на скорость гибели названных инфузорий при условии сохранения при этом гидр. Получились следующие результаты: метиленблау в концентрации от 0.000005 до 0.0000025 удовлетворяет указанным условиям. Я брал главным образом мелких, тощих гидр, голодавших несколько дней и покрытых множеством триходин — до 30 и более экземпляров на одной небольшой гидре. В указанном растворе концентрации 0.000005 инфузории в среднем погибают уже через 12—15 мин. Нормально они быстро двигаются на теле гидры, суетливо бегая взад и вперед. В краске они в течение первых минут начинают синеть, причем краска в них собирается в гранулы. Движение инфузорий становится все медленнее, и несколько меняется характер его: они начинают описывать все меньшего и меньшего диаметра круги и наконец, вращаясь на подобие волчка, отваливаются с тела гидры, продолжая еще некоторое время вращаться, замирая, в воде поблизости от гидры. Они умирают, падая на дно сосуда. Гибнут триходины не все сразу, проявляя различную стойкость в отношении к краске.

В концентрации 0.0000025 гибель инфузорий затягивается в среднем до 40 мин. Картина повторяется в общем та же.

На гидр пребывание в краске такой концентрации вредно почти не отзывается. Гидры быстро синеют, особенно щупальцы, и лишь у редких экземпляров появляются единичные утолщения в щупальцах, что кончается разрушением щупальца в утолщенном месте. Все гидры, которых я имел в опыте, в количестве нескольких десятков, состоявших почти исключительно из слабых экземпляров, благополучно оставались жить, вынутые из краски, в течение многих дней.

Нейтральрот и нильблаусульфат оказывают подобное же действие приблизительно в тех же концентрациях, как и метиленовая синька.

Более сильные концентрации этих красок действуют скорее на инфузорий, но зато вредно отзываются на гидрах, вызывая утолщения не только на щупальцах, но и на стеблях, в результате чего отваливаются и стебли и щупальца, и легко погибают гидры, особенно более мелкие и тощие экземпляры. Такой эффект оказывает, например, нильблаусульфат в концентрации 0.00005. Инфузории начинают погибать уже после 5 мин. пребывания в краске.

Таким образом, в надлежащей концентрации названные витальные краски могут служить своего рода дезинфекцией для зараженных гидр, что в некоторых случаях при работах с гидрами может иметь несомненно практическое значение.

Ускорить удаление паразитов с тела гидры можно своего рода прополаскиванием их с помощью пипетки, путем втягивания гидр в пипетку

и резкого выталкивания их из пипетки обратно в сосуд с водой. Ослабленные действием краски триходины при этом довольно легко отваливаются с тела гидры, заметно раньше, чем на спокойно сидящих гидрах. Одно прополаскивание упомянутым способом, без действия красок, полностью триходин, насколько мне удалось наблюдать, не удаляет.

Поступило
1 XII 1934

---

*PROTISTOLOGIE*

## ÜBER DIE WIRKUNG DER VITALFARBEN AUF TRICHODINEN

Von J. KANAJEV

(*Vorgelegt von A. Richter, Mitglied d. Akademie, d. 1.XII.1934*)

Während meiner Versuche mit vitaler Färbung der *Pelmatohydra oligactis* habe ich die Beobachtung gemacht, dass die Trichodinen (*domergii?*), welche auf den Hydren parasitieren, in schwachen Lösungen von Vitalfarben zu Grunde gehen. Die Hydren aber bleiben in diesen Lösungen am Leben.

Bei meinen Versuchen habe ich drei Farben gebraucht: Neutralrot, Methylenblau und Nilblau. Alle drei Farben haben ungefähr dieselbe Wirkung.

In der Konzentration 0.000005 von Methylenblau sterben die Trichodinen im Laufe von 12—15 Minuten. Während dieser Zeit werden ihre Rotationsbewegungen immer langsamer und nehmen an Amplitude ab. Dabei fallen die Trichodinen — nicht alle gleichzeitig — vom Körper der Hydra ab. Einige Minuten bewegen sie sich noch, langsam erstarrend, im Wasser neben den Hydren.. Schliesslich sinken sie auf den Boden des Gefässes und sterben. Die Hydren leben aber fast unbeschädigt weiter.

Eine schwächere Lösung wirkt in ähnlicher Weise, nur langsamer. Z. B. in der Konzentration 0.0000025 von Methylenblau fallen die letzten Infusorien vom Körper der Hydren nach 40 Minuten ab u. s. w.

Eine stärkere Lösung wirkt schneller, dabei werden aber die Hydren beschädigt. Schon in der Konzentration 0.000005 bekommen einige Hydren (die schwächsten, wahrscheinlich) Geschwülste auf einigen Tentakeln. Diese letzteren brechen an der geschwollenen Stelle ab. Dennoch bleiben alle Hydren am Leben.

In stärkeren Lösungen bekommen alle Hydren derartige Geschwülste nicht nur auf allen Tentakeln, sondern auch auf dem Stiel. Bald darauf gehen die meisten, wenn nicht alle Hydren zu Grunde.

Somit sehen wir, dass gewisse schwache Lösungen von obengenannten Vitalfarben als eine Desinfektion vernichtend auf die Trichodinen wirkt und die Hydren somit von diesen Parasiten befreit werden können, was bei Hydra-Kulturen auch eine praktische Verwendung finden kann.

Die Befreiung der Hydren von den Parasiten kann beschleunigt werden, wenn man die Hydren mittels einer Pipette so zu sagen ausspült: man zieht die Hydren in die Pipette hinein und stösst sie mit einer scharfen Bewegung wieder hinaus in das Gefäss. Dabei werden die halbvergifteten Trichodinen vom Hydrakörper mechanisch fortgespült.

Eingegangen
d. 1. XII. 1934.

А. А. ЛИНДБЕРГ

# О ДЕЙСТВИИ ЭТИЛОВОГО АЛКОГОЛЯ НА КОРУ БОЛЬШИХ ПОЛУШАРИЙ ГОЛОВНОГО МОЗГА

(*Представлено академиком И. П. Павловым 3 XII 1934*)

Наркотическое, парализующее деятельность центральной нервной системы конечное действие этилового алкоголя, и особенно больших доз, признается всеми физиологами и фармакологами, изучавшими действие этого яда (напр., Jacobi, 1857; Meihuizen, 1873; Albertoni, 1882; Данилло, 1882; Жуковский, 1898; Heinz, 1907; Завадский, 1908 и многие другие). Однако относительно характера и механизма действия этилового алкоголя на центральную нервную систему мнения различных авторов значительно расходятся; самое существенное расхождение касается первоначальной стадии действия алкоголя и именно той картины общего возбуждения, которая наблюдается во многих случаях алкогольного отравления как у человека, так и у различных лабораторных животных. Это общее возбуждение принималось весьма многими авторами (напр., Kraepelin) как выражение прямого возбуждающего действия алкоголя на центральную нервную систему и именно на большие полушария головного мозга; подтверждение этому усматривалось в опытах Баратынского (1893), показавшего, что у голубей после предварительного удаления больших полушарий головного мозга начальная стадия возбуждения, которая в норме всегда наблюдается при определенных дозах алкоголя, отсутствует. Дальнейшие подтверждения давали этому положению данные многих физиологических опытов, показавших, что во многих случаях алкоголю принадлежит свойство повышать возбудимость различных тканей (изолированный нерв лягушки — Mommsen, 1881; Efron, 1885; Breyer, 1903; нервно-мышечный препарат — Scheffer, 1900; кровеносные сосуды — Catel u. Mennicke, 1923), в том числе центральной нервной системы вообще (Brunton, 1895; некоторые опыты Жуковского, 1898) и мозговой коры в частности (двигательная область — Couty, 1883). Однако, в дальнейшем по мере развития учения о задерживающих центрах в головном мозге мнение большинства авторов (Schmiedeberg, 1883; Heinz, 1907 и др.) склонилось к тому, что наблюдаемая картина первоначального возбуждения не является результатом прямого возбуждающего действия алкоголя на центральную нервную систему, а есть следствие паралича задерживающих центров.

Экспериментальная проверка этого предположения оказалась возможной лишь после введения в физиологию метода условных рефлексов; однако, не вполне согласные результаты опытов Завадского (1908) и Никифоровского (1910) требовали тщательной проверки для окончательного разрешения этого вопроса, и с согласия акад. И. П. Павлова мною были поставлены соответствующие опыты.

Опыты были поставлены на собаке „Полкан“, кобеле весом около 20 кг; эта собака до того служила для ряда других опытов, она принадлежала к сильному, уравновешенному типу и отличалась крайне постоянными величинами положительных пищевых условных рефлексов и очень прочными тормозами (дифференцировка на кожно-механическое раздражение по месту и условный тормоз — гудение телефона + свет). Все

условные раздражители применялись в виде стереотипной системы раздражителей, т. е. всегда следовали в одинаковом порядке и через одинаковые интервалы; время изолированного действия их равнялось 15 сек. в первой серии опытов и 30 сек. во второй. Интервалы между условными раздражителями были равны 8 мин. Различные дозы (20—90 см³) 96° этилового алкоголя, разведенного дистиллированною водою (ad 300 см³), вводились за 15—30 мин. до опыта в желудок при помощи желудочного зонда; в контрольных опытах было установлено, что ни процедура введения зонда, ни введение до опыта воды не оказывали ни малейшего действия на величины условных рефлексов.

Основные данные относительно действия различных доз этилового алкоголя на условно-рефлекторную деятельность собаки представлены в таблице, в которой приведена одна серия опытов.

Величины условных слюнных рефлексов за 15 сек. изолированного действия условных раздражителей в делениях шкалы (5 дел. =1 капля).

Werte der bedingten Reflexe während 15 Sek. der isolierten Wirkung der Reize (in Teilstrichen der Messröhre: 5 Teilstr. = 1 Tropfen = 0.05 cm³).

| Дата 1933 г. Datum 1933 | Наименование условных раздражителей Bedingte Reize | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Опыты Versuche | Касалка положительн. Mechan. Hautreiz positiv. | Шум Lärm | Свет Licht | Касалка дифференцировк. Mechan. Hautreiz negat. | Касалка положительн. Mechan. Hautreiz positiv. | Условный тормоз Bed. Hemmer | Шум Lärm | Свет Licht |
| 5 VI | Нормальный . . . . . Norm | 35 | 37 | 12 | 0 | 17 | 2 | 21 | 9 |
| 6 VI | Алкоголь 35 см³ . . . Alkohol 35 cm³ | 40 | 40 | 16 | 3 | 13 | 2 | 14 | 3 |
| 8 VI | Нормальный . . . . . Norm | 38 | 37 | 18 | 2 | 20 | 2 | 22 | 5 |
| 9 VI | Алкоголь 50 см³ . . . Alkohol 50 cm³ | 30 | 38 | 20 | 0 | 12 | 0 | 21 | 7 |
| 15 VI | Нормальный . . . . . Norm | 35 | 35 | 15 | 1 | 14 | 2 | 19 | 8 |
| 16 VI | Алкоголь 75 см³ . . . Alkohol 75 cm³ | 20 | 22 | 6 | 4 | 10 | 2 | 5 | 3 |
| 20 VI | Алкоголь 90 см³ . . . Alkohol 90 cm³ | 27 | 28 | 5 | 10 | 9 | 8 | 3 | 5 |
| 21 VI | Нормальный . . . . . Norm | 35 | 38 | 15 | 0 | 17 | 2 | 20 | 8 |

Примечание. Во всех опытах этой серии алкоголь вводился при помощи желудочного зонда за 15 мин. до начала опыта; вода ad 300 см³; интервалы между условными раздражителями — 8 мин.

Anmerkung. In allen Versuchen dieser Reihe wurde Alkohol mit Hilfe der Magensonde 15 Min vor dem Versuch verabreicht; Wasser ad 300 cm³. Zeitabstände zwischen den bedingten Reizen = 8 Min. Der positive mechanische Hautreiz wurde am Hinterbein der negative am Vorderbein appliziert. Der bedingte Hemmer = Zischen + Licht.

В процессе настоящей работы были сделаны следующие наблюдения и получены нижеследующие данные:

**1.** Дозы 96-градусного алкоголя в 20, 35 и 50 $см^3$ не вызывали почти никаких изменений в общем поведении собаки, как до начала опыта, так и в течение его; при дозе в 35 $см^3$ отмечалась слабая степень гипнотизации собаки, которая начиналась с середины опыта, несколько нарастала к концу и сопровождалась заметным падением величины условных рефлексов на последние раздражители. После дачи 50 $см^3$ алкоголя в одном из опытов наблюдалось заметное расстройство координации движений по окончании опыта (неловкость при соскакивании со станка, пошатывание при схождении с лестницы и при отряхивании и т. д.). Эти дозы не оказывали почти никакого влияния ни на процессы возбуждения, ни на процессы торможения.

**2.** Большие дозы алкоголя — 75 и 90 $см^3$ — резко изменяли как общее поведение животного во время опыта, так и специально нами изучаемые реакции на условные раздражители.

Изменения общего поведения заключались в том, что, примерно, через 40 мин. после начала опыта (в опыте 16 VI через 4 мин., а в опыте 20 VI через $1^1/_2$ мин. после применения условного тормоза) собака ложилась и при подкреплении следующих раздражителей, т. е. при подаче пищи, или брала ее в полулежачем положении, или же не брала совершенно. После окончания опыта наблюдались резкие нарушения координации движений.

Изменения условно-рефлекторной деятельности были следующие:

а) Весьма умеренное падение величин положительных условных рефлексов в начале опыта, свидетельствовавшее о начинающемся параличе возбуждения.

б) Весьма значительное растормаживание тормозных рефлексов, которое указывало на значительное ослабление процессов внутреннего, выработанного в данных условиях опыта торможения. Последнее выступало особенно отчетливо в то время, когда раздражительный процесс или оставался нормальным или был ослаблен в весьма незначительной степени.

Об ослаблении тормозного процесса свидетельствовали также и двигательные реакции собаки: так, в опыте 20 VI при действии отрицательной касалки с 5-й сек. была отчетливая двигательная пищевая реакция; на положительные условные раздражители она была ускорена и усилена; кроме того собака в интервалах нередко совалась в кормушку, чего она в норме никогда не делала.

в) Очень сильное падение величины всех положительных условных рефлексов к концу опыта, которое говорило о постепенном развитии сильного паралича процессов возбуждения.

**3.** Действие одной и той же дозы алкоголя не является постоянным, неменяющимся; оно в значительной степени зависит от общего тонуса центральной нервной системы. Так, в опытах с исследованными нами пищевыми рефлексами отчетливо выступило значение степени возбудимости пищевого центра. Доза алкоголя в 75 $см^3$, которая при тех условиях, что опыты ставились в одно и то же время дня, т. е. при одинаковой пищевой возбудимости, и опыты с алкоголем производились через достаточные промежутки времени (7—15 дней), оказывала весьма постоянное общее действие и влияние на условные рефлексы (см. п. 2), оказала несравненно более сильное угнетающее действие, когда опыт был поставлен на 2 часа раньше обычного, т. е. при пониженной пищевой возбудимости:

с середины опыта наступило полное прекращение рефлекторной деятельности головного мозга, собака легла и до конца опыта не встала, на раздражители не реагировала совершенно, подаваемую пищу не брала. Наоборот, когда опыт был поставлен на $2^1/_2$ часа позже обычного, т. е. при повышенной пищевой возбудимости, собака в течение всего опыта не ложилась, отказов от взятия пищи не было совершенно, падение положительных условных рефлексов к концу опыта было несколько меньше, чем обычно.

4. Дальнейшие опыты с алкоголем, а также и с другими парализаторами центральной нервной системы (hypnotica), в которых детально изучался ход условного слюноотделения (рефлекс регистрировался за каждые 5 сек. в течение всех 30 сек. изолированного действия положительных условных раздражителей) вполне подтвердили наблюдавшееся ослабление дифференцировочного торможения и дали дальнейший материал о том, что в первую очередь страдают именно процессы внутреннего торможения. Опыты показали, что при применении первых условных раздражителей, когда рефлексы могут иметь нормальную или несколько большую величину, ход слюноотделения представляет резкие отклонения от нормы. В норме наблюдается обычно (исключения представляют лишь единичные собаки), что при известном отставлении раздражителей (достаточно 30 сек.), рефлекс за первую половину действия меньше, чем за вторую; это объясняется вмешательством запаздывающего торможения в начале действия раздражителя. При действии парализаторов центральной нервной системы наблюдаются случаи, когда рефлекс за первую половину больше, чем за вторую; это может быть понято как результат ослабления внутреннего торможения. В дальнейшем, наряду с ослаблением торможения, наступает сначала слабое, далее глубокое угнетение процесса раздражения. На ходе слюноотделения это выражается сначала в резком падении условного рефлекса к концу действия раздражителя; валовая величина условного рефлекса может быть в это время не уменьшенной. В дальнейшем наступает резкое падение условных рефлексов вплоть до полного исчезновения их.

Физиологический институт.
Академия Наук СССР.
Ленинград.

Поступило
8 XII 1934.

---

*TIERPHYSIOLOGIE*

## ÜBER DIE WIRKUNG VON ÄTHYLALKOHOL AUF DIE GROSSHIRNRINDE

Von ALEXANDER LINDBERG

*(Vorgelegt von I. Pavlov, Mitglied der Akademie, d. 3. XII. 1934)*

Alle Physiologen und Pharmakologen sind wohl in der Hinsicht einer Meinung, dass Äthylalkohol, und besonders in grossen Mengen, eine narkotisierende Wirkung ausübt, wobei die die Tätigkeit des Zentralnervensystems paralysierende Wirkung dieses Gifts deutlich hervortritt (Jacobi, 1857; Meihuizen, 1873; Albertoni, 1882; Danillo, 1882; Schukovsky, 1898; Heinz, 1907; Zavadsky, 1908 u. a. m.). Was aber den Mechanismus dieser

Wirkung auf das Zentralnervensystem anbetrifft, so sind die Meinungsverschiedenheiten sehr gross; dieses bezieht sich ganz besonders auf das anfängliche Stadium der Wirkung dieses Mittels, und nämlich auf das Bild der allgemeinen Erregung, das sowohl beim Menschen als auch bei verschiedenen Versuchstieren in vielen Fällen beobachtet werden kann. Dieser Zustand der allgemeinen Erregung ist von einigen Autoren (z. B. Kraepelin) als Ausdruck einer direkten erregenden Wirkung dieses Mittels auf das Zentralnervensystem und hauptsächlich auf die Grosshirnhemisphären betrachtet worden. Eine Bestätigung dieser Ansicht ersah man in den Versuchsergebnissen von Baratinsky (1893), der gezeigt hatte, dass bei Tauben, bei denen die Grosshirnhemisphären operativ entfernt sind, das anfängliche Stadium der Erregung, das bei normalen Versuchsobjekten nach bestimmten Alkoholmengen immer eintritt, ausbleibt. Da ausserdem eine Reihe von physiologischen Versuchen ergeben hatte, dass durch Alkohol die Erregbarkeit von verschiedenen Geweben gesteigert werde, hielt man die direkte erregende Wirkung des Alkohols auf die Grosshirnhemisphären für sichergestellt (der isolierte Froschnerv — Mommsen, 1881; Efron, 1885; Breyer, 1903; das Nerv-Muskelpräparat — Scheffer, 1900; die Blutgefässe — Catel und Mennicke, 1923; das Zentralnervensystem — Brunton, 1895; einige Versuche von Schukovsky, 1898; die motorische Grosshirnrinde — Couty, 1883). Nachdem aber die Lehre von den Hemmungszentren im Grosshirn eine fast allgemeine Anerkennung gefunden hatte, kam immer öfter die Ansicht zum Ausdruck (Schmiedeberg, 1883; Heinz, 1907 u. a. m.), dass das Bild der anfänglichen allgemeinen Erregung nicht das Resultat der direkten erregenden Wirkung von Alkohol auf das Zentralnervensystem betrachtet werden dürfte, dass dieses vielmehr als Folge der Lähmung der Hemmungszentren aufgefasst werden müsste.

Die Möglichkeit einer experimentellen Durchprüfung dieser Frage war geboten, als die Methode der bedingten Reflexe in die Physiologie eingeführt wurde, und die Frage wurde von einigen Mitarbeitern von Dr. I. Pavlov aufgegriffen (Zavadsky, 1908; Nikiforovsky, 1910). Nicht völlig eindeutige Versuchsergebnisse der genannten Forscher und eine Reihe von neuen Gesichtspunkten, die in der Physiologie der bedingten Reflexe z. Z. herrschen, machten die Überprüfung dieser Frage nötig, und aus diesem Grunde wurde die Frage über die Wirkung von Alkohol auf die Prozesse der kortikalen Erregung und Hemmung von mir wieder aufgegriffen

Die Versuche wurden an einem etwa 20 kg schweren Hunde (Polkan) ausgeführt, der vor dieser Versuchsreihe im Laufe von $2^1/_2$ Jahren mir zu Versuchszwecken gedient hatte. Das Versuchstier gehörte zum starken Nerventypus, mit gut ausbalançierten Prozessen der Erregung und Hemmung; es zeichnete sich durch sehr beständige Speichelreflexe und durch vollkommene Differenzierungen aus. Alle bedingten Reize wurden bei diesem Tier stets als ein stereotypes Reizsystem angewandt, d. h. immer in ein und derselben Reihenfolge und in gleichen Zeitabständen (8 Min.) voneinander. Die Zeit der isolierten Wirkung der bedingten Reize betrug in der ersten Versuchsreihe 15 Sek. und in der zweiten 30 Sek. (Versuchsergebnisse der letzten siehe unter 4); darauf wurden sie durch Futter (Fleischzwiebackpulver) bekräftigt. 96°-iger Alkohol (20—90 $cm^3$) mit Wasser ad 300 $cm^3$ wurde mit Hilfe der Magensonde 15—30 Min. vor dem Versuch verabreicht; in Kontrollversuchen (Verabreichung von reinem Wasser, Einführen der Sonde usw.) wurde festgestellt, dass die Prozedur der Verabreichung keinen Einfluss auf die Werte der bedingten Reflexe ausübt.

Das erhaltene Material über die Wirkung von verschiedenen Mengen Alkohol auf die bedingt-reflektorische Nerventätigkeit ist in Tabelle 1 zusammengefasst, in dieser Tabelle (s. 401) sind die Versuchsergebnisse der 1. Versuchsreihe dargestellt.

Im Laufe dieser Untersuchung sind folgende Beobachtungen gemacht und nachstehende Resultate erhalten worden:

**1.** Durch 96°-igen Alkohol in Mengen von 20, 35 und 50 $cm^3$ (Wasser ad 300 $cm^3$) wurde das allgemeine Verhalten des Hundes sowohl vor dem Versuch (1—15 Min.), als auch im Laufe desselben (etwa 1 Std.) fast gar nicht verändert. Nach der Verabreichung von 35 $cm^3$ Alkohol trat in der zweiten Hälfte des Versuchs eine schwache Schläfrigkeit des Hundes ein; dem Ende des Versuchs zu wurde sie etwas grösser; während dieser Zeit waren die positiven Reflexe bedeutend herabgesetzt. In einem Versuch mit 50 $cm^3$ Alkohol konnte nach Beendigung des Versuchs eine bedeutende Störung der Bewegungskoordination bemerkt werden. Die Beeinflussung der kortikalen Prozesse durch diese Mengen Alkohol war sehr gering. Das Stadium der anfänglichen Erregung fehlte gänzlich (in Übereinstimmung mit Ssetschenov).

**2.** Grössere Alkoholmengen (75 und 90 $cm^3$) verursachten sowohl eine bedeutende Veränderung des allgemeinen Verhaltens während des Versuchs als auch beträchtliche Veränderungen der positiven und negativen bedingten Reflexe.

Veränderungen des allgemeinen Verhaltens während des Versuchs: etwa 40 Min. nach dem Beginn des Versuchs (im Versuch vom 16. Juni 4 Min., im Versuch vom 20 Juni $1^1/_2$ Min. nach der Applikation des bedingten Hemmers) legte sich das Tier hin; bei der Bekräftigung der folgenden Reize wurde das Futter entweder halb liegend verzehrt, oder näherte sich das Tier der Futterschale gar nicht. Nach Beendigung der Versuche waren starke Bewegungsstörungen zu verzeichnen.

Veränderungen der bedingt-reflektorischen Tätigkeit: a) im Beginn der Versuche eine nicht starke Herabsetzung der positiven bedingten Reflexe, die vom Beginn einer Lähmung des Erregungsprozesses zeugte; b) eine bedeutende Enthemmung der negativen Reflexe (besonders im Versuch vom 20. Juni), die als Folge einer bedeutenden Schwächung der Prozesse der inneren, unter speziellen Versuchsbedingungen ausgearbeiteten Hemmung aufgefasst werden konnte. Weitere Versuche ergaben, dass diese Erscheinung besonders deutlich hervortritt zu der Zeit, wenn die Erregung entweder gar nicht oder nur sehr schwach herabgesetzt ist; c) eine starke Herabsetzung aller positiven bedingten Reflexe in der zweiten Hälfte des Versuchs, die von einer allmählich eintretenden sehr starken Lähmung der Erregungsprozesse zeugte.

Dass in den Versuchen vom 16. und 20. Juni der Hemmungsprozess tatsächlich abgeschwächt war, zeugten auch die motorischen Reaktionen des Tieres: im Versuch vom 20. Juni trat bei der Applikation des negativen Hautreizes eine deutliche positive Nahrungsreaktion ein (5.—10. Sek.); nach Beendigung des Einwirkens dieses Reizes näherte sich der Hund der Futterschale und guckte hinein. Bei der Anwendung des darauffolgenden positiven mechanischen Hautreizes bereits von der 1. Sek. eine positive motorische Nahrungsreaktion ein, und in der 13. Sek. legte das Tier die Schnauze in die Futterschale. In einigen Intervallen zwischen den Applikationen der bedingten Reize kam das Tier während der 7. und 8. Min. wiederholt zur Futterschale. Alle diese Erscheinungen, die in vielen Versuchen mit grossen Mengen Alkohol beobachtet werden konnten, fehlten unter normalen Verhältnissen, d. h. in der ganzen Vorversuchsperiode (viele Monate) und in Kontrollversuchen, da diese motorischen Reaktionen infolge des Eingreifens der Prozesse der inneren Hemmung entsprechend den Versuchsbedingungen stets gehemmt waren.

**3.** Die Wirkung ein und derselben Menge Alkohol ist von Versuch zu Versuch nicht vollkommen beständig. Die Wirkung dieses Mittels kann,

abhängig vom Tonus des Zentralnervensystems während des Versuchs, bald mehr, bald weniger stark sein.

In unseren Versuchen mit bedingten Nahrungsreflexen trat die Bedeutung des Grades der Erregbarkeit des Nahrungszentrums zur Zeit des Versuchs sehr deutlich hervor. Die Menge Alkohol von 75 $cm^3$, die unter den Bedingungen, dass die Versuche stets streng um ein und dieselbe Tagesstunde angestellt wurden (d. h. bei gleichem Grade der Erregbarkeit des Nahrungszentrums) und dass die Alkoholversuche in genügend grossen Zeitabständen (7—15 Tage) gemacht wurden, einen sehr beständigen Einfluss auf die bedingt-reflektorische Tätigkeit ausübte, bewirkte eine bedeutend stärkere lähmende Wirkung, als der Versuch um 2 Stunden früher, als die Versuche gewöhnlich gemacht wurden, angestellt wurde, d. h. bei einer nicht so starken Nahrungserregbarkeit. In diesem Falle legte sich der Hund in der Mitte des Versuchs hin und blieb bis zum Abschluss des Versuchs fast bewegungslos liegen; alle positiven Reflexe blieben gänzlich aus, beim Reichen der Futterschale gab es keine Versuche, das Futter zu ergreifen usw. Im Gegenteil, als der Versuch um $2^1/_2$ Stunden später als gewöhnlich, d. h. bei gesteigerter Nahrungserregbarkeit angestellt wurde, war die Wirkung des Alkohols auf die höhere Nerventätigkeit bedeutend schwächer, als in allen Versuchen, die zu gewöhnlicher Zeit ausgeführt worden waren: in diesem Falle stand das Tier im Laufe des ganzen Versuchs vollkommen munter, es verweigerte nicht das Futter zu ergreifen, die Herabsetzung der positiven bedingten Reflexe in der zweiten Hälfte des Versuchs war sehr gering.

**4.** Weitere Versuche mit Alkohol (und auch mit anderen Paralysatoren des Zentralnervensystems, mit verschiedenen Schlafmitteln), in denen der Gang der Speichelaussonderung während der Zeit der isolierten Wirkung der bedingten Reize genau untersucht wurde (in dieser Versuchsreihe wurden die Speichelreflexe für jede 5 Sek. im Laufe von total 30 Sek. registriert), bestätigten einerseits die bereits erwähnte Abschwächung der Prozesse der inneren Hemmung (Differenzierungs-Hemmung und bedingte Hemmung) unter dem Einflusse von grossen Mengen Alkohol und erbrachten neues Beweismaterial, dass unter dem Einflusse dieses Mittels die innere Hemmung (und zwar die Verspätungshemmung) tatsächlich in erster Linie leidet. Diese Versuche ergaben, dass bei den ersten Applikationen der bedingten Reize in Versuchen mit Alkohol, wenn die bedingten Reflexe gegen die Norm unveränderte Totalwerte (während 30 Sek.) aufweisen, der Gang der Speichelsekretion gegen die Norm stark verändert ist. In normalen Versuchsverhältnissen lässt es sich immer beobachten (nur einzelne Versuchshunde bilden eine Ausnahme), dass bei einer bestimmten Dauer der isolierten Wirkung der bedingten Reize (z. B. 30 Sek.) die bedingte Speichelsekretion während der ersten Hälfte der Einwirkung eines jeden Reizes bedeutend geringer ist als während der zweiten Hälfte; der Gang der Speichelabsonderung stellt eine aufsteigende Linie dar. Dieses wird dadurch erklärt, dass in der ersten Hälfte der Zeit der isolierten Wirkung die sogen. Verspätungshemmung dem Erregungsprozess entgegenarbeitet, und ist durch Versuche mit sogen. verspätenden Reflexen (Zeit der isolierten Wirkung der Reize 2—3 Min.) genügend sichergestellt. Ganz analog sind aber die Verhältnisse zwischen den beiden Prozessen auch dann, wenn die Zeit der isolierten Wirkung der Reize nur 15 oder 30 Sek. beträgt: die Sekretion ist beim Einsetzen des Reizes schwach und wird desto grösser, je mehr das Einwirken des Reizes sich dem Augenblick der Bekräftigung nähert. In Alkoholversuchen konnte nun beobachtet werden, dass die Speichelsekretion während der ersten Hälfte der isolierten Wirkung der bedingten Reize gegen die Norm vergrössert und während der zweiten bedeutend herabgesetzt ist; eine Vergrösserung der Speichelsekretion während der zweiten Hälfte ist in keinem Versuch aufgetreten. Dieses kann als ein ausreichender Beweis betrachtet werden dafür, dass unter

dem Einflusse dieses Mittels eine deutliche Abschwächung der inneren Hemmung stattfindet, die der Erregung nicht mehr entgegenzuarbeiten vermag, und dass eine wirkliche Steigerung der Erregung tatsächlich fehlt, — der Erregungsprozess wird zwar etwas labiler, da er durch die Hemmung nicht gezügelt wird, doch ist die Leistungsfähigkeit der entsprechenden Nervenelemente herabgesetzt. In weiteren Stadien der Alkoholwirkung tritt parallel der Abschwächung des Hemmprozesses eine mehr und mehr zunehmende Abschwächung des Erregungsprozesses ein. Der Gang der Speichelabsonderung weist einen starken Abfall zum Ende der isolierten Wirkung der bedingten Reize auf; der Totalwert der bedingten Reflexe kann aber nur wenig vermindert sein. Beim Fortschreiten der Alkoholwirkung tritt eine starke Verminderung der bedingten Reflexe ein und schliesslich bleiben diese Reflexe gänzlich aus.

Physiologisches Institut.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR.
Leningrad.

Eingegangen
d. 3. XII. 1934.

---

*ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЗООЛОГИЯ*

В. П. КАЗАНЦЕВ

## К ВОПРОСУ О РЕГЕНЕРАЦИИ МУСКУЛЬНОЙ ТКАНИ У МЛЕКОПИТАЮЩИХ

(*Представлено академиком Н. В. Насоновым 23 XII 1934*)

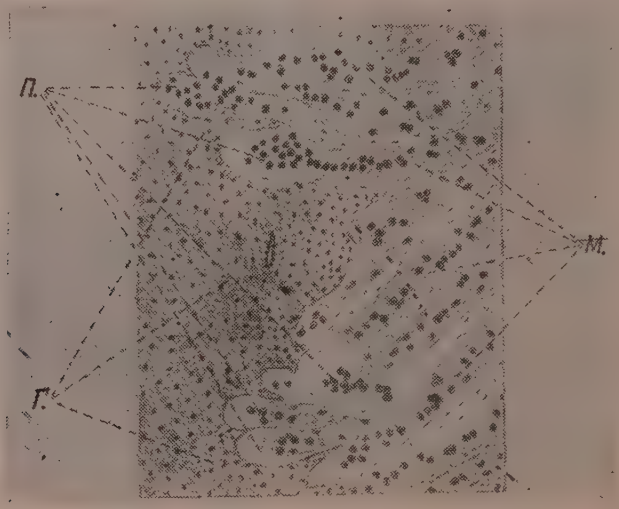
Вопрос о регенерации поперечнополосатой мускульной ткани у млекопитающих, и в частности у человека, имеет свою длинную историю.

Что мускульная ткань млекопитающих не совершенно лишена способности регенерировать, за это говорят некоторые давно известные по отношению к человеку факты: регенерация мускульной ткани после атрофии в связи с брюшным тифом, частичная регенерация мускульной ткани конечностей после обмораживания ([6]), после повреждения мускульной ткани сдавливанием и наложением лигатур ([1, 2, 3, 6]) при впрыскивании в мускульную ткань различных веществ ([4, 6]), при тонких надрезах мускулов ([6, 5]). Что же касается способности мускульной ткани млекопитающих к регенерации после повреждений, связанных с удалением части мышечной ткани, то до 1917 г. считалось твердо установленным, что регенерации мускульной ткани в таких случаях не происходит, и дефект заполняется соединительнотканным рубцом.

В 1917 г. германский хирург Бир ([7]) сообщил о случае полной регенерации мышечной ткани после операции при значительном дефекте сгибателей бедра у человека. По его данным, для того, чтобы полость дефекта заполнилась регенерирующей мускульной тканью, а не соединительнотканным рубцом, необходимо соблюдение определенных условий, главными из которых являются: сохранение полости дефекта и заполнение его благоприятной средой: серозно-лимфатическим выпотом или кровью. С тех пор и до настоящего времени Биру и его сотрудникам не удавалось больше получить полной регенерации мускульной ткани у человека.

Бундшу ([9]), удаляя при операциях на человеке часть мускульной ткани в $1^1/_2$—3 см и применяя предложенную Биром технику, получил отрицательные результаты: полость дефекта заполнялась соединительнотканным рубцом.

Точно так же Шварц ([10]), экспериментировавший на собаках, применяя технику Бира, получил отрицательные результаты: полость дефекта заполнялась соединительнотканным рубцом. Драчинская ([11]), производившая свои опыты над кроликами с применением предложенной Биром техники, пришла к заключению, что жировая ткань, замещающая грануляционную ткань, „росту мышечного волокна не мешает", но регенерация




Фиг. 1. 8 дней после операции. Часть продольного среза. *Г* — грануляционная ткань, *М* — мускульные волокна, *П* — концевые почки мускульных волокон. Цейсс, объектив С, окул. 10 ×, рисовальный аппарат Аббе, на высоте столика микроскопа.

Abb. 1. 8 Tage nach der Operation. Teil eines Längsschnitts. *Г* — Granulationsgewebe. *М* — Muskelfasern, *П* — Endknospen der Muskelfasern. Zeiss, Objektiv C, Oc. 10 ×, Zeichenapparat nach Abbe, auf der Höhe des Mikroskoptisches.

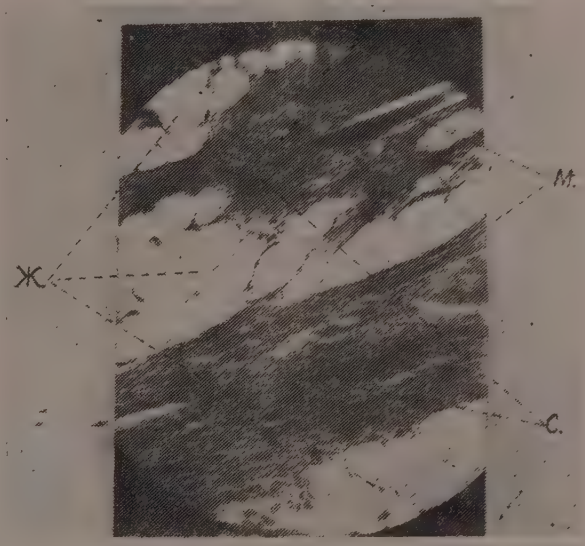
происходит медленно и через 2 года после операции „приблизительно в середине полости дефекта находится небольшой участок жировой ткани, вокруг которой и в которой располагаются мышечные волокна в различных направлениях.

Мои опыты были произведены на кроликах. На задней конечности разрезалась кожа, подкожная клетчатка, musculus vastus lateralis в направлении его волокон и фасциальная оболочка короткой головки m. recti femoris. Из этого последнего мускула вырезался кусочек приблизительно кубической формы размером в 6—8 мм в ребре. Полость дефекта в большинстве случаев заполнялась кровью, а в некоторых случаях физиологическим раствором, жировой тканью или размельченной мышечной тканью. После операции на кожу накладывались швы. Наиболее благоприятные результаты были получены при заполнении полости дефекта кровью, так

как кровь, быстро свертываясь, во-первых, способствует соблюдению первого из выдвигаемых Биром условий — сохранению полости дефекта, и, во-вторых, сгусток крови представляет собой благоприятную среду для пролиферации тканей.

В заполненную первоначально свернувшейся кровью полость дефекта вскоре после операции начинают проникать клеточные элементы, из которых формируется так наз. грануляционная ткань, постепенно замещающая собой заполнявший полость дефекта сгусток крови.

Спустя неделю после операции большая часть полости дефекта оказывается уже заполненной грануляционной тканью и лишь в середине




Фиг. 2. 50 дней после операции. Часть продольного среза. *Ж* — жировая ткань, *С* — волокнистая соединительная ткань, *М* — отдельные мускульные волокна в соединительной ткани. Микрофотография Цейсс, апохр. 8 мм, комп. окул. 10 ×, растяжение камеры 24 см.

Abb. 2. 50 Tage nach der Operation. Teil eines Längsschnitts, *Ж* — Fettegewebe, *C* — faseriges Bindegewebe, *M* — einzelne Muskelfasern im Bindegewebe. Mikrophot. Zeiss, Apochrom. 8 mm, kompens. Oc. 10 ×, Kameraauszug 24 cm.

дефекта сохраняется еще сгусток крови. Уже на такой стадии на граничащих с полостью дефекта концах перерезанных при операции мускульных волокон замечаются некоторые ясно выраженные изменения (фиг. 1).

На некотором протяжении от места обреза концы мускульных волокон проходят не прямолинейно, а более или менее изогнуто в ту или другую сторону, вследствие чего и параллельность расположения мускульных волокон оказывается до некоторой степени нарушенной. На концевых участках отдельных мускульных волокон наблюдаются изменения, во многих отношениях очень сходные с теми, которые имеют место на концах перерезанных мускульных волокон аксолотля на определенных стадиях

регенерации ампутированных конечностей. Количество ядер на их концевых участках сравнительно с нормой значительно увеличено, и они располагаются продольными рядами или группами. Поперечная полосатость, ясно выраженная на некотором расстоянии от концов волокон, по направлению к концам делается менее ясной и на конечных участках совершенно исчезает. Самые конечные отделы мускульных волокон обыкновенно несколько утолщены, лишены не только поперечной, но и продольной полосатости и состоят из гомогенной на вид протоплазматической массы с ядрами.

Эти видоизмененные концевые отделы вполне сходны с так наз. „терминальными почками" регенерирующих мускульных волокон амфибий, и уже на такой стадии вдаются в заполняющую полость дефекта грануляционную ткань.

На последующих стадиях регенерационные почки мускульных волокон значительно удлиняются, делаясь при этом более тонкими, и проникают в различных направлениях на значительное расстояние в заполняющую полость дефекта грануляционную ткань. И на такой стадии регенерационные почки сами по себе очень сходны с таковыми соответствующих стадий регенерации мускульной ткани у аксолотля, с тем лишь ясно выраженным отличием, что здесь эти почки не имеют прямого и более или менее параллельного между собой направления, а загибаются в самых различных направлениях. Так как регенерационные почки входят в грануляционную ткань и со дна дефекта, то на стадии в 3—4 недели после операции грануляционная ткань дефекта оказывается пронизанной проходящими в самых различных направлениях регенерационными почками мускульных волокон. Приблизительно в срок около 4 недель после операции в грануляционной ткани дефекта начинает появляться жировая ткань с прослойками плотной волокнистой соединительной ткани, которая, распространяясь, постепенно замещает собой грануляционную ткань, причем разрушаются и исчезают пронизывавшие грануляционную ткань регенерационные почки мускульных волокон. После заполнения всей полости первоначального дефекта, жировая ткань с прослойками волокнистой соединительной ткани распространяется несколько за пределы первоначального дефекта, и около границы ее распространения в это время на препаратах в прослойках волокнистой соединительной ткани можно видеть отдельные сохранившиеся поперечнополосатые мускульные волокна (фиг. 2, *M*).

Таким образом, нахождение отдельных мускульных волокон в участке, заполненном жировой тканью с прослойками волокнистой соединительной ткани, является не следствием врастания мускульных волокон в жировую ткань, как это принимается Драчинской, а следствием распространения жировой ткани за пределы первоначального дефекта.

Итак, результаты произведенного исследования приводят к следующим выводам: 1) отдельные волокна мускульной ткани кролика обладают способностью к регенеративным явлениям; 2) грануляционная ткань не оказывает непреодолимого препятствия проникновению в нее регенерационных почек мускульных волокон, но эти последние располагаются в грануляционной ткани не параллельно между собой, а изогнуты в различных направлениях; 3) в конечном результате регенерационные почки мускульных волокон не дают начала новой мускульной ткани, а дегенерируют и исчезают.

Лаборатория экспериментальной зоологии.
Академия Наук СССР. Ленинград.

Поступило
23 XII 1934.

# ZUR FRAGE DER REGENERATION DES QUERGESTREIFTEN MUSKELGEWEBES BEI DEN SÄUGETIEREN

Von V. KAZANCEV (KAZANZEFF)

(*Vorgelegt von N. Nassonov, Mitglied der Akademie, d. 23. XII. 1934*)

Die Frage nach der Regenerationsfähigkeit des quergestreiften Muskelgewebes bei den Säugern ist sehr alt und es existiert darüber eine sehr umfangreiche Literatur.

Dass dem quergestreiften Muskelgewebe der Säugetiere die Fähigkeit zur Regeneration nicht vollständig abgeht, dafür sprechen einige altbekannte Tatsachen, wie z. B. die Regeneration des entarteten Muskelgewebes beim Menschen nach überstandenem Typhus, teilweise Regeneration des Muskelgewebes der Extremitäten des Menschen nach dem Abfrieren (6). Was aber die Regenerationsfähigkeit des Muskelgewebes der Säugetiere nach mechanischen Verletzungen betrifft, so galt es bis zum Jahre 1917 als festgestellt, dass in allen Fällen, in welchen bei der Verletzung ein Teil des Muskelgewebes entfernt wird, keine Neubildung des Muskelgewebes stattfindet, sondern dass der Raum des Defekts vom Narbengewebe ausgefüllt wird.

Im Jahre 1917 veröffentlichte der deutsche Chirurg Bier eine Mitteilung über einen Fall von vollständiger Regeneration der Muskelgewebes nach Operation beim Menschen und zwar bei erheblichem Defekt in der Muskulatur der Oberschenkels. Nach den Angaben von Bier muss, um die Regeneration des Muskelgewebes zu erzielen, die nach Entfernung eines Teils des Muskelgewebes entstandene Lücke erhalten und mit einem günstigen Medium ausgefüllt werden: mit serös-lymphatischem Exsudat, oder mit Blut.

Seitdem ist es Bier und seinen Mitarbeitern nicht mehr gelungen, eine vollständige Regeneration des Muskelgewebes beim Menschen zu erzielen.

Bundschuh (9) entfernte bei Operationen am Menschen $1^1/_2$—3 cm grosse Stückchen vom Muskelgewebe und erzielte dabei nach Anwendung der von Bier vorgeschlagenen Technik keine Regeneration des Muskelgewebes. Die Lücke wurde von Narbengewebe ausgefüllt.

Ebenso konnte Schwarz (10), der an Hunden experimentierte, bei Anwendung der von Bier vorgeschlagenen Technik keine Neubildung von Muskelgewebe hervorrufen: die Lücken wurden vom Narbengewebe ausgefüllt.

Dračinskaja (11) experimentierte an Kaninchen mit Anwendung der von Bier vorgeschlagenen Technik und gelangte zu folgenden Ergebnissen: das an Stelle der Granulationsgewebe auftretende Fettgewebe „behindert nicht den Wachstum der Muskelfasern", aber die Regeneration soll sehr langsam vor sich gehen, und 2 Jahre nach der Operation „befindet sich ungefähr in der Mitte der Defektlücke ein unbedeutender Bezirk von Fettgewebe, um welchen herum ebenso wie in seinem Inneren in verschiedene Richtungen verlaufende Muskelfasern gelagert sind".

Meine Untersuchung wurde an Kaninchen ausgeführt. Für die Versuche wurde der kurze Kopf (caput breve) vom musculus rectus femoris

der hinteren Extremität gewählt. Nach dem Durchschneiden der Haut, des Unterhautbindegewebes, des musculus vastus lateralis in der Richtung seiner Fasern und der den kurzen Kopf vom musculus rectus femoris umhüllende Faszie, wurde aus diesem letzteren Muskel ein würfelförmiges Stückchen von etwa 6 bis 8 mm ausgeschnitten. Die dadurch entstandene Lücke wurde in der Mehrzahl der Fälle mit Blut ausgefüllt. In einigen Fällen habe ich die Defektlücke mit physiologischer Kochsalzlösung, mit Fettgewebe oder mit Muskelgewebebrei ausgefüllt. Nach der Operation wurde die Haut zugenäht. Die Füllung der Defektlücke mit Blut erwies sich als die am meisten zweckmässige, weil dasselbe, rasch gerinnend, die Erhaltung der Defektlücke sichert und dabei ein günstiges Medium für die Proliferation der Gewebe bildet.

In die zuerst von Blutgerinnsel gefüllte Defektlücke hinein wandern Zellen bindegewebiger Natur, aus welchen sich das sogenannte Granulationsgewebe aufbaut.

Eine Woche nach der Operation ist schon der grösste Teil der Defektlücke vom Granulationsgewebe ausgefüllt, und nur in der Mitte des Defekts bleibt noch ein Rest von Blutgerinnsel erhalten. Schon in diesem Stadium sind an den bei der Operation durchgeschnittenen Muskelfasern deutliche Veränderungen bemerkbar (Fig. 1).

Auf einer gewissen Strecke von der Grenze des Defekts verlaufen die Muskelfasern nicht geradlinig, sondern erscheinen in verschiedenen Richtungen etwas gekrümmt, wodurch die parallele Lagerung der einzelnen Fasern auf dieser Strecke merklich gestört wird.

Die Anz hl der Kerne an den Endabschnitten der Fasern ist im Vergleich mit der Norm bedeutend vermehrt. Innerhalb der Übergangszone zwischen dem normalen Teil der Faser und seinem veränderten Endabschnitt sind die Kerne sehr häufig in kettenförmigen Längsreihen angeordnet. Die Querstreifung wird gegen die Enden der Fasern zu immer undeutlicher und verschwindet. Die Enden der Fasern sind gewöhnlich etwas verdickt, entbehren nicht nur der Quer- sondern auch der Längsstreifung und bestehen aus homogen aussehender protoplasmatischer Masse mit Kernen im Inneren. Die soeben beschriebenen Veränderungen der Endabschnitte der Muskelfasern gleichen in allen wesentlichen Zügen den Veränderungen, welche in gewissen Stadien der Regeneration der abgeschnittenen Extremitäten beim Axolotl an den bei der Amputation durchgeschnittenen Muskelfasern vor sich gehen. Ähnliche Veränderungen wurden schon von mehreren früheren Forschern bei der Regeneration des Muskelgewebes beschrieben und die in der Weise veränderten Enden der Muskelfasern werden von ihnen gewöhnlich als „terminale Knospen“ bezeichnet. Schon in diesem Stadium ragen die varänderten Enden der Muskelfasern etwas in das die Defektlücke ausfüllende Granulationsgewebe hinein.

In den folgenden Stadien werden die terminalen Knospen der Muskelfasern bedeutend länger, indem sie sich gleichzeitig stark verdünnen. Sie ragen in verschiedenen Richtungen auf bedeutende Strecken in das die Lücke ausfüllende Granulationsgewebe hinein. Auch in diesem Stadium sind terminale Knospen an und für sich den entsprechenden Stadien der Regeneration des Muskelgewebes beim Axolotl sehr ähnlich. Ein wesentlicher Unterschied besteht aber darin, dass die terminalen Knospen hier nicht geradlinig und mehr oder weniger parallel zu einander verlaufen, sondern ganz unregelmässig in verschiedenen Richtungen umgebogen sind. Da die Endknospen der Muskelfasern auch vom Boden des Defekts in das

Granulationsgewebe eindringen, so sieht man an den Präparaten der 3- bis 4-wöchentlichen Stadien das Granulationsgewebe von in verschiedensten Richtungen verlaufenden Endknospen der Muskelfasern durchzogen. Ungefähr vier Wochen nach der Operation tritt im Granulationsgewebe dass Fettgewebe auf, das von einzelnen Zügen faserigen Bindegewebes durchzogen ist. Das Fettgewebe mit dem in ihm eingelagerten faserigen Bindegewebe breitet sich aus und verdrängt ziemlich rasch das Granulationsgewebe, wobei die im letzteren eingeschlossen gewesenen Endknospen der Muskelfasern degenerieren und verschwinden.

Nachdem das vom faserigen Bindegewebe durchschichtete Fettgewebe das Granulationsgewebe verdrängt und den Defekt völlig ausgefüllt hat, breitet es sich etwas über die Grenzen des anfänglichen Defekts aus. An der Grenze seiner Ausbreitung zu dieser Zeit sieht man an den Präparaten einzelne erhalten gebliebene, in den Zügen von faserigeom Bindegewebe eingeschlossene, quergestreifte Muskelfasern (Fig. 2, *M*). Kurz gefasst, sind die Ergebnisse der Untersuchung folgende: 1) einzelne Muskelfasern des Kaninchens besitzen eine ausgesprochene Fähigkeit zu regenerativen Vorgängen; 2) dans Granulationsgewebe stellt keinen unüberwindlichen Widerstand dem Eindringen der Regenerationsknospen der Muskelfasern entgegen; dieselben ordnen sich aber im Granulationsgewebe nicht parallel zu einander, sondern sind unregelmässig in verschiedenen Richtungen verbogen; 3) es kommt aber nicht zur Bildung von neuem Muskelgewebe, sondern die Regenerationsknospen der Muskelfasern degenerieren und verschwinden. Zur Klärung der Frage nach der Ursache der unregelmässigen Verbreitung der terminalen Knospen der Muskelfasern und des Mangels an Koordination zwischen den in einzelnen Muskelfasern sich abspielenden regenerativen Vorgängen, ebenso wie der Frage nach dem möglichen Widerstand vonseiten des auftretenden Bindegewebes sind weitere Experimente angestellt.

Laboratorium für experimentelle Zoologie.
Akademie der Wissenschaften der UdSSR. Leningrad.

Eingegangen
d. 23. XII. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — LITERATUR

[1] Heidelberg. Inaug. Diss., Breslau, 1878. [2] Ebkamm. Virchov's Arch., 79, 1880. [3] Рахманинов. Дисс., Москва, 1881. [4] Robert. Ziegl. Beitr. path. Anat., 10, 1891 (Pfuhl. Verh. Anat. Gesell., 1934). [5] Locatelli. Arch. Ital. Biol., 77, fasc. 1, 1926. [6] Volkmann. Ziegl. Beitr. path. Anat., 12, 1898. [7] Bier. Berl. klin. Woch., № 3 u. 10. [8] D. med. W., 1917—1919. [9] Bundschuh. Ziegl. Beitr. path. Anat., 6, H. 3, 1928. [10] Schwarz. Deutsch. ZS. f. Chir., 189, 1925. [11] Драчинская. Из Фак. хир. клин. Лен. мед. инст., 1925.

## *ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЗООЛОГИЯ*

Академик Н. В. НАСОНОВ.

## ЗНАЧЕНИЕ ХРЯЩА В ФОРМООБРАЗОВАНИИ У АКСОЛОТЛЯ

После ампутации конечностей и хвоста у аксолотлей при регенерации хрящ непосредственно прилегает к регенерационной почке, причем хрящ претерпевает ряд изменений и надхрящница пролиферирует в нее. Кроме того, при культуре in vitro может образоваться хрящ у аксолотлей из соединительной ткани при действии на нее экстракта из хряща [Насонов (1)]. Все это дает повод предполагать, что хрящ может играть некоторую роль в образовании регенерационной почки.

Для того, чтобы выяснить значение присутствия хряща при образовании регенерата, я поставил опыты с вложением отдельных кусочков хряща под кожу конечностей аксолотля, и в результате получалось появление, на месте вложений, повторных частей конечности в виде пальцев, соединенных перепонкою (фиг. 1*a*), или более сложных образований (фиг. 1*b*) на различных частях ножек, причем на стопе и кисти всегда появлялись только пальцы. Все полученные образования несколько меньшей величины, чем нормальные, но не деградируют и полученные около года тому назад не изменились.

Фиг. 1. Задняя ножка черного аксолотля с двумя повторными частями ножки на ступне (*a*) и на голени (*b*), образовавшимися после вложения под ножку кусочка хряща.

Fig. 1. Hind leg of black axolotl with two duplicate parts of the leg on the foot (*a*) and on the shank (*b*) developed after the insertion of a piece of cartilage.

При опытах брались части гиалиновых хрящей аксолотля и в немногих случаях лягушки. Осторожно делая разрез кожи ножек, чтобы не повредить лежащие под ней мускулы и скелет, я вводил под кожу при помощи маленького пинцета с тупыми закругленными концами кусочек хряща. При этом я вкладывал его через разрез кожи как можно дальше от места разреза, а именно миллиметров на 5—$7^1/_2$, чтобы быть вполне уверенным, что этот надрез не повлияет на ход процессов, происходящих вокруг вложенного хряща. Хрящи вкладывались частью с надхрящницей, так как невозможно быть уверенным, что она была вполне удалена от хряща. Для выяснения начальных стадий наблюдаемых явлений были взяты белые аксолотли возрастом 6—$8^1/_2$ месяцев, а для поздних черные 7—10 месяцев.

Вложенный под кожу хрящ иногда не претерпевает изменений и не вызывает формообразований, но в большинстве случаев, особенно когда целость его нарушена, он начинает разрушаться (фиг. 2*a*). Основное вещество его разрыхляется, изменяет свое однородное строение и при действии фиксаторов часто сокращается в размерах (фиг. 2*a*). В нем появляются трещинки, и поверхность его делается как бы зазубренной, и на ней скопляется обыкновенно большое число фагоцитов, которые способствуют разрушению хряща. Иногда остатки основного вещества остаются долго неразрушенными. На более поздних стадиях можно видеть вокруг остатков основного вещества большое количество клеток, повидимому, различного происхождения.

Первые изменения, замечаемые в близ лежащих тканях, состоят в том, что над местом нахождения хряща начинает разрушаться кутис (фиг. 2*b*). По всему вероятию он отмирает и уничтожается фагоцитами. В то же время у места нахождения хряща клетки эпителия начинают размножаться. Он приподнимается в виде бугорка, который увеличивается и стенки которого на вершине сильно утолщаются и принимают вид выроста значительных размеров и неправильной формы, часто загибающегося на одну сторону (фиг. 2*c*). Таким образом, мы видим, что результатом присутствия разрушающегося хряща является уничтоже-

ние кутиса на месте появления бугорка и стимуляция размножения эпителия. Приподнятие эпителия в виде бугорка увеличивается, и в основании его образуется полость, которая наполняется клетками соединительной ткани. Они поступают сюда из рыхлой подкожной клетчатки и имеют эмбриональный характер. Кроме того, здесь образуются расширения кровеносных сосудов и полости, наполненные кровью (фиг. 2*d*).

Фиг. 2. Разрез через место вложения под кожу хряща через 45 дней после вложения. *a* — разрушающийся хрящ, несколько сжатый от действия фиксатора, *b* — кутис, *c* — вырост на приподнятой над хрящем части эпителия, *d* — полость, наполненная кровью, *e* — концы отдельных частей мускульных волокон с началом образования миобластов. Фиксация — „Суза", окраска по Маллори.

Fig. 2. Section through site of subcutaneous insertion of cartilage on 45th day after insertion. *a* — disintegrating cartilage, somewhat contracted under the action of fixatives, *b* — cutis, *c* — outgrowth on the epithelial prominence above the cartilage, *d* — cavity filled with blood, *e* — ends of separate parts of muscle fibres with developing myoblasts. Fixation — Suza, stained after Mallory.

Эпителиальный вырост на вершине возвышения остается иногда очень долго, но впоследствии всегда отпадает. Эпителий принимает свой обычный вид, и образуется придаток конической или пластинчатой формы.

В начале разрушения вложенного хряща начинают изменяться также мышечные волокна, а именно, близ кусочка хряща они утончаются и теряют свою поперечную полосатость (фиг. 2*e*). В то же время число ядер в мускульных волокнах здесь увеличивается, и вокруг каждого ядра начинают обособляться участки плазмы для образования миобластов. Волокно разделяется таким образом на две части. Если процесс идет дальше и полость придатка увеличивается, то свободные концы обоих частей мышечных волокон загибаются по направлению к полости придатка. Получающиеся, как при регенерации, тяжи с большим числом ядер и миобласты, образующиеся здесь, входят в нее.

Далее, клетки, образовавшиеся вокруг остатка основного вещества хряща, также направляются в полость придатка. Что касается до образования нового хряща, то, повидимому, он образуется из части этих клеток, но которые из них идут на образование хряща и в какой мере здесь в образовании хондриобластов участвует соединительная ткань, в частности надхрящница вложенного хряща, должны показать дальнейшие исследования.

Если вложенный хрящ помещается вблизи хряща скелета хозяина, то первый может также влиять на соединительную ткань (в том числе надхрящницу), окружающую второй, и из этой соединительной ткани также может образоваться новый хрящ. В этих случаях, повидимому, получаются более развитые повторные придатки.

---

Все описанные процессы несомненно сходны с теми, которые происходят при регенерации конечности при ее ампутации. Мы знаем, что в последнем случае после эпителизации раны весьма часто наблюдаются образовавшиеся утолщения эпителия. Кроме того, под эпителием при регенерации никогда не образуется кутиса, и этому вероятно способствует присутствие разрушающегося хряща. Этот хрящ, помещающийся под кожей, освобождает ее от кутиса того района, на котором происходит формообразование.* В образующееся полое возвышение кожи, лишенное кутиса, так же как при регенерации, входят элементы соединительной ткани эмбрионального характера и элементы крови. Эта стадия развития повторной конечности соответствует началу образования так наз. бластемы регенерата.

Вложенный хрящ вызывает в мускульных волокнах такие же изменения, которые происходят в них в начале регенерационного процесса при ампутации конечности и хвоста аксолотля. Как мы знаем, в результате этих изменений появляются миобласты, которые входят в полость образовавшегося возвышения эпителия, как входят они при регенерации в бластему, которая при дальнейшем развитии принимает постепенно коническую форму и носит название „конуса“ (Вейс и др.). Миобласты среди клеток этой бластемы можно отличить по форме и струкуре ядра. Из этих миобластов образуются на дальнейших стадиях развития регенерата мускульные волокна [Казанцев (2)].

В полость того же возвышения эпителия, которое впоследствии может развиться в повторное образование, вместе с миобластами, как и при регенерации, входят хондриобласты, образующиеся из соединительной ткани. Принимают ли участие в образовании хондриобластов также клетки вложенного хряща, не установлено для регенерационного процесса вследствие трудности установления морфологических различий их от клеток соединительной ткани.

В виду вышеизложенного нельзя не признать, что хрящ с надхрящницей может играть при известных условиях большую роль в образовании регенерационной почки и сам по себе легко может вызвать различного рода изменения в тканях и формообразования. Поэтому при всякого рода

* Если бы кутис здесь сохранился, то формообразование здесь было бы невозможно, как невозможно образование регенерата, если рана при ампутации покрывалась бы не одним эпителием, но также и кутисом. В то же время ряд опытов, произведенных мною с вложением под кожу различных разрушенных тканей, показал, что они могут разрушать кутис. Разрушенный хрящ, продукты разрушения которого, повидимому, сильнее действуют в этом отношении, как бы устраняет таким путем образование препятствия, которое составляет кутис для регенерационных процессов.

пересадках регенерационных почек должно быть обращено большое внимание на то, чтобы с ними не были захвачены хотя бы очень маленькие кусочки хряща с надхрящницей. Также при оценке различных опытов с вызыванием всякого рода формообразований и регенерационных процессов при помощи надрезов, разрушения тканей и т. п. нужно принимать во внимание свойство разрушенных участков хряща, которые, как мы видели, могут сами по себе вызывать упомянутые явления.

Во время исследований, изложенных в моих предварительных сообщениях о „формообразовании при вложении под кожу разрушенной регенерационной почки“ (4),* а также „высушенной регенерационной почки“ (5), мне не были известны вышеописанные свойства хряща и я не мог придавать им такого значения при своих опытах, а потому при вложении под кожу в некоторых случаях при почках могло оставаться небольшое количество хряща, хотя видимые при пересадках простым глазом части хряща, оставшиеся при отрезании почки, всегда удалялись от нее. Дальнейшие наблюдения покажут, какие из наблюдаемых явлений нужно отнести на счет деятельности элементов почти при полной гарантии отсутствия участия хряща и какие из них нужно отнести на счет деятельности хряща, если бы он был взят вместе с почкой, хотя в минимальном размере. Что же касается до главного вывода, что наибольшее развитие полученного повторного придатка конечности определяется местом его появления, то он во всяком случае не изменяется [Насонов (4, 5)]. С другой стороны, если бы оказалось, что формообразования и хрящ, образовавшиеся при вложении под кожу сухой регенерационной почки, получились от присутствия в ней весьма небольших остатков хряща, то одинаково остается в силе то предположение, что здесь имеется особое вещество, которое способно давать примитивные формообразования и изменять соединительную ткань в хрящ.** Это последнее подтверждается исследованиями над действием водного экстракта из хряща и надхрящницы на соединительную ткань в культурах in vitro, при которых можно получить хрящ [Насонов (1)].

Лаборатория экспериментальной зоологии.
Академия Наук СССР. Ленинград.

Поступило
25 I 1935.

---

*EXPERIMENTAL ZOOLOGY*

## THE ROLE OF CARTILAGE IN FORMATIONS IN AXOLOTLS

**By N. V. NASSONOV, Member of the Academy**

After the amputation of limbs and tails in regenerating animals (axolotls) the cartilage directly adjoins the regeneration bud, the perichondrium proliferating into it and the cartilage undergoing a number of changes. Moreover, in cultures *in vitro* cartilage may form in axolotls from

* Пользуюсь случаем сделать в этой статье на стр. 259, строка 13 сверху, следующее исправление: вместо слов „те, которые“ следует читать „некоторые“ и на строке 15 сверху исключить слова: „носят название у немецких авторов Doppel- oder Mehrfachbildungen“.

** В этом предварительном сообщении я могу лишь сказать, что при вложении сухого и измельченного хряща под кожу аксолотля получаются примитивные пальцевидные образования, по внешнему виду совершенно сходные с описанными мною в статье о формообразовании при вложении под кожу высушенных регенерационных почек. Получается ли внутри них хрящ, как это иногда можно наблюдать при вложении под кожу упомянутых почек, еще не выяснено, так как исследование еще не закончено и требует, повидимому, как и в последнем случае, для получения результатов опытов весьма продолжительного времени и большого числа вложений.

connective tissue under the action of cartilage extracts [Nassonov (1)]. All this suggests that cartilage may play a certain role in the formation of the regeneration bud.

In order to elucidate the role of cartilage in the formation of the regenerate, I made subcutaneous insertions of separate pieces of cartilage into the limbs of an axolotl. This resulted in many cases in the appearance of reiterated or duplicate parts of the extremities, in the form of digits interconnected by a membrane (Fig. 1*a*, p. 414) or of more complicated formations (Fig. 1*b*) on different parts of the legs. But only digits always appear on the foot and hand. All the formations obtained are somewhat smaller than normal ones but do not degenerate. For instance, those obtained about a year ago have not changed.

In these experiments parts of the hyaline cartilage of an axolotl and in several cases of a frog were used. After making a careful incision in the skin of the leg so as not to injure the underlying muscles and skeleton, I inserted a piece of cartilage under the skin by means of a pair of blunt pincettes with rounded tips. I inserted this piece through the incision in the skin as far as possible, namely 5 to $7^1/_2$ mm, from the place of incision, so as to make sure that this incision would not affect the processes taking place around the inserted bit of cartilage. The cartilages were inserted partly together with their perichondrium, for it was impossible to be certain that all the perichondrium in the axolotl has been removed from the cartilage. To elucidate the initial stages of the phenomena uder consideration, we used white axolotls aged 6 to $8^1/_2$ months, black axolotls aged 7 to 10 months being taken for the later stages.

Sometimes subcutaneously inserted cartilage remains unchanged and does not cause formations. But in the majority of cases, especially if its integrity has been broken, it begins to disintegrate. Its ground substance begins to loosen, changes its homogeneous structure, and often contracts under the action of fixation (Fig. 2*a*, p. 415). There appear fissures in the ground substance, and its surface becomes, so to say, indented, and usually large numbers of phagocytes concentrate on this surface, thus promoting the disintegration of the cartilage. Sometimes the remnants of the ground substance remain for a long time undisintegrated. In later stages, one observes a large number of cells, probably of different origin, around the remnants of the ground substance.

The first changes to be observed in the adjacent tissues consist in the decomposition of the cutis above the cartilage (Fig. 2b). By all probability it dies and is consumed by phagocytes. At the same time, epithelium cells begin to multiply at the place of insertion of the cartilage. The epithelium rises in the form of a tubercle. The latter grows and its walls become much thicker on the summit and assume the appearance of an outgrowth of considerable size and irregular form, often bending to one side (Fig. 2*b*). We thus see that the presence of disintegrating cartilage leads to the decomposition of the cutis at the site of the tubercle and stimulates the growth of epithelium. The tubercle-like prominence of the epithelium increases in height, and a cavity develops in its base, which becomes filled with cells migrating hither from the loose subcutaneous connective tissue. They are of an embryonic character. Blood vessels are observed to dilate here, and cavities filled with blood are formed (Fig. 2*d*).

The epithelial outgrowth on the summit of the prominence sometimes remains for a long time, but later on it always falls off. The epithelium resumes its normal appearance, and an appendage of a conical or lamellar

shape is formed. In the initial stages of disintegration of the inserted cartilage, the muscle fibres also begin to change, namely, they become thinner and lose their striation in the neighbourhood of the piece of cartilage (Fig. 2*e*). Simultaneously, the number of nuclei in the muscle fibres here increases, and plasma begins to separate into parts surrounding each nucleus to form myoblasts. The fibre thus divides into two parts. When the process develops further and the cavity of the appendage increases, then the free ends of both parts of the muscle fibres bend in the direction of the cavity of the appendage. As in regeneration, both the tips of muscle fibre with a large number of nuclei and the myoblasts which form here enter the cavity.

The cells formed around the remnants of the ground substance of the cartilage also move towards the cavity of the appendage. The new cartilage seems to develop from a part of these cells, but further investigations will show which of these cells take part in the formation of cartilage and to what degree connective tissue and, in particular, perichondrium of the inserted cartilage participate in the formation of chondrioblasts.

If the inserted cartilage lies near the cartilage of the host's skeleton, then the first may also affect the connective tissue (including perichondrium) surrounding the latter, and new cartilage may develop form this connective tissue. It is, probably, in such cases that we obtain more developed duplicate appendages.

---

All the above described processes are undoubtedly similar to those which occur during the regeneration of an amputated limb. We know that in the latter case a thickening of the epithelium after the epithelization of the wound may be very often observed. Moreover, cutis never forms under the epithelium during regeneration. The presence of disintegrating cartilage seems to contribute to this. This cartilage, situated under the skin, rids it of the cutis of the region wherein the process of formation takes place.*

Elements of the connective tissue of an embryonic character and elements of the blood invade, as in regeneration, the growing hollow prominence of the skin. This stage of the development of the duplicate limb corresponds to the beginning of the formation of the so-called regenerate blastema.

Then the inserted cartilage causes the same changes in muscle fibres as occur in them in the initial stage of regeneration after the amputation of limb and tail in the axolotl. As we know, these changes result in the development of myoblasts, which enter the cavity of the newly formed epithelial prominence similarly to their penetration during regeneration into the blastema, which with further development gradually assumes a conical shape and is known by the name of „cone" (Weiss and others). The myoblasts can be distinguished by the shape and structure of their nucleus. In the later stages of development of the regenerate these myoblasts develop into muscle fibres [Kazancev (3)].

* If the cutis were to remain, then the process of formation would become as impossible as the formation of a regenerate in case the wound left after the amputation were to be covered not only with epithelium but also with cutis. At the same time a number of my experiments of subcutaneous insertions of different disintegrated tissues has shown their capacity of decomposing cutis. Disintegrated cartilage, whose products of disintegration have, probably, greater effect in this respect, thus inhibits, as it were, the formation of the obstacle presented by cutis to regenerative processes.

Chondrioblasts formed from connective tissue penetrate together with myoblasts, as in regeneration, into the cavity of this prominence of the epithelium, which may later develop into a duplicate formation. In view of the difficulty of establishing morphological differences between the cells of the inserted cartilage and the cells of the connective tissue mingling with them, it has not yet been established whether the former also take part in the formation of chondrioblasts in processes of regeneration.

It has to be concluded from the above that under certain conditions cartilage with its perichondrium can play an important part in the formation of the regeneration bud and can by itself produce various changes in the tissues and formations. Great care must, therefore, be taken in all kinds of transplantations of regeneration buds not to include in the cut-off bud even the slightest bits of cartilage and its perichondrium. When estimating the results of experiments wherein all kinds of formative processes and processes of regeneration are caused by incisions, disintegrated tissues, etc., it is necessary to take into account the properties of the destroyed sections of cartilage, which, as we have seen, can by themselves be the cause of the above phenomena.

During my investigations described in my preliminary communications on „Formations produced by the subcutaneous insertion of a destroyed regeneration bud“ (4)* and „by the subcutaneous insertion of a desiccated regeneration bud“ (5), I did not yet know the above described properties of cartilage and could not, therefore, attach such importance to them in my experiments. Therefore, in some cases in subcutaneous insertions there could remain in the buds a small quantity of cartilage, although in transplantations all the parts of the cartilage visible to the naked eye after cutting off the bud were always removed. Further investigation will show which of the observed phenomena must be referred to the activities of the elements of the bud, absolutely free from cartilage, and which of them must be referred to the activities of the cartilage, if a small quantity of it is included in the transpladed bud. In any case, our main conclusion that the maximum development of the obtained duplicate appendage of the limb is determined by the place where this appendage forms holds true.

On the other hand, if it were found that the formations and cartilage developed on the subcutaneous insertion of a desiccated regeneration bud were caused by the presence of very minute remains of cartilage, then the supposition that we have here to deal with a special substance which possesses the property of causing primitive formations and of converting connective tissue into cartilage also holds.** This supposition is confirmed by investigations of the effect of aqueous cartilage and perichondrium extract on connective tissue in cultures *in vitro*, which results in the development of cartilage.

Laboratory of Experimental Zoology,
Academy of Sciences of the USSR.
Leningrad.

Received
25. I. 1935.

* I avail myself of this occasion to make the following corrections in that paper: on page 262, top, line 7, instead of „Those, which“ read „Some of them“ and in the 8th line cancel the words „are called by German authors Doppel- oder Mehrfachbildungen“.

** In this preliminary communication I can only say that the subcutaneous insertion of dried and finely ground cartilage causes in the axolotl primitive digitlike formations quite similar in appearance to those described in my paper on formations produced

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] Н. В. Насонов. ДАН, т. III, 1934, стр. 202. N. V. Nassonov. C. R. Acad. Sci. URSS, v. III, No 3, p. 205, 1934. [2] В. П. Казанцев. Тр. Лаб. эксп. зоолог. АН, т. III, 1934. V. P. Kazancev. Memoirs of the Labor. of Exp. Zool. Acad. Sci. USSR, v. III, 1934. [3] W. Helmich. Arch. Entw. Mech., 121, 1930. S. 135. [4] Н. В. Насонов. ДАН т. II, 1932, стр. 259. N. V. Nassonov. C. R. Acad. Sci. URSS, v. II, p. 261, 1934, [5] Н. В. Насонов. ДАН, т. II, стр. 325. N. V. Nassonov. C. R. Acad. Sci. URSS. v. II, p. 328, 1934.

---

*ЗООЛОГИЯ*

**А. Н. СВЕТОВИДОВ**

## О ЧЕРНОМОРСКОЙ ФОРМЕ МЕРЛАНГА (*GADUS MERLANGUS EUXINUS*)

(*Представлено академиком С. А. Зерновым 15 XI 1934*)

Фауна Черного моря, помимо коренных его обитателей — „понтических реликтов", в значительной мере, как известно, состоит из более поздних средиземноморских пришельцев, проникших сюда после прорыва Босфора. Как показали работы последнего времени ([1]), некоторые из средиземноморских рыб за время пребывания их в Черном море образовали здесь самостоятельные формы (*Engraulis encrasicholus ponticus* Alexandrov, *E. encrasicholus maeoticus* Pusánov, 2 natio *Mullus barbatus ponticus* Essipov). К числу средиземноморских рыб, обособившихся в Черном море в самостоятельные формы, как оказывается, относится и черноморский мерланг (*Gadus euxinus* Nordmann),* относительно которого долгое время оставалось неясным, является ли он самостоятельным видом или идентичен с близким к нему *Gadus merlangus* L. Некоторые авторы ([2]), считая *Gadus euxinus* самостоятельным видом, отмечают его нахождение помимо Черного, и в Адриатическом море. Другие авторы ([3]) не находят отличий между *Gadus euxinus* и близким к нему *Gadus merlangus* и относят его к этому виду. В последнее время об идентичности *Gadus euxinus* и *Gadus merlangus* предположительно высказывается D'Ancona ([3]). Однако, просмотр хранящихся в коллекциях Зоологического института Академии Наук СССР и Московского института рыбной промышленности 13 экземпляров *Gadus merlangus* и большого количества *Gadus euxinus* позволяет установить, что *Gadus euxinus* не есть ни самостоятельный вид, ни идентичен с *Gadus merlangus*, а является подвидом последнего, свойственным лишь Черному морю.

У *Gadus euxinus* на подбородке всегда имеется хорошо заметный усик (у экзампляров 120—180 мм длиной усик имеет в длину 2.3—3.2 мм), в то время как у *Gadus merlangus*, этот усик, как правило, отсутствует

in the axolotl by the subcutaneous insertion of a desiccated regeneration bud. It is not known whether cartilage is present within these formations, as is sometimes the case when the above-mentioned buds are subcutaneously inserted, inasmuch as the investigation has not yet been completed and will seemingly require much time and a great number of insertions.

* Называемый на Черном море пикшей (неправ.), аспропсаро.

Пределы колебаний систематических признаков *G. merlangus* и *G. merlangus euxinus*
Range of variations of the differential characters of *G. merlangus* and *G. merlangus euxinus*

| | *Gadus merlangus* | *Gadus merlangus euxinus* |
|---|---|---|
| Длина тела общая в мм<br>Length of body in mm | 119 —303 | 122 —180 |
| Длина тела до основания *C*<br>Length of body to base of *C* | 110 —276 | 112 —165 |
| В % общей длины тела—In % of body length | | |
| Расстояние до I*D*<br>Distance from tip of snout to base of I*D* | 28.6—30.0 | 27.6—30.2 |
| Расстояние до I*A*<br>Distance from tip of snout to base of I*D* | 34.1—38.2 | 35.6—38.2 |
| Длина грудного плавника<br>Length of pectoral fin | 13.8—15.6 | 15.4—18.2 |
| Длина брюшного плавника<br>Length of ventral fin | 7.4— 8.6 | 8.1—11.3 |
| Длина основания I*D*<br>Base of I*D* | 11.6—14.5 | 12.3—15.8 |
| Длина основания II*D*<br>Base of II*D* | 19.8—22.1 | 17.3—19.9 |
| Длина основания III*D*<br>Base of III*D* | 15.0—16.7 | 14.3—17.1 |
| Длина основания I*A*<br>Base of I*A* | 30.4—33.1 | 29.0—31.6 |
| Длина основания II*A*<br>Base of II*A* | 13.5—17.6 | 13 5—17.0 |
| Высота I*D*<br>Depth of I*D* | 9.4—12.4 | 11.7—13.8 |
| Высота тела наибольшая<br>Depth of body | 15.3—18.8 | 14.6—19.2 |
| Высота тела наименьшая<br>Depth of caudal peduncle | 4.7— 5.5 | 3.6— 4.5 |
| Длина хвостового стебля<br>Length of caudal peduncle | 9.6—11.7 | 10.5—12.5 |
| Длина головы<br>Length of head | 23.9—25.2 | 23.7—25.8 |
| Длина рыла<br>Length of snout | 7.9— 9.0 | 7.8— 9.1 |
| Продольный диаметр глаза<br>Longitudinal diameter of eye | 5.5— 6.9 | 5.4— 6.8 |
| Заглазничный отдел головы<br>Postorbital space | 9.3—10.8 | 10.1—10.9 |
| Длина верхней челюсти<br>Length of upper jaw | 9.2—10.5 | 9.7—11.0 |
| Длина нижней челюсти<br>Length of lower jaw | 12.6—13.4 | 11.9—13.5 |
| Высота головы<br>Depth of head | 10.1—11.3 | 10.8—12.1 |
| Ширина головы<br>Interorbital space | 4.9— 6.2 | 4.7— 5.9 |

*(Продолжение)*

| | *Gagus merlangus* | *Gadus merlangus euxinus* |
|---|---|---|
| В % длины головы — In % of head length | | |
| Длина рыла . . . . . Length of snout | 32.2—35.6 | 32.2—34.8 |
| Продольный диаметр глаза . . . . . Longitudinal diameter of eye | 21.6—28.8 | 22.8—26.5 |
| Заглазничный отдел головы . . . . . Postorbital space | 39.1—42.9 | 40 9—45.5 |
| Длина верхней челюсти . . . . . Length of upper jaw | 40.6—44.1 | 38.8—43.3 |
| Длина нижней челюсти . . . . . Length of lower jaw | 50.7—56.0 | 49.0—52.2 |
| Число лучей I*D* . . . . . Number of rays in I*D* | 12 —15 | 14 —17 |
| Число лучей II*D* . . . . . Number of rays in II*D* | 18 —25 | 16 —19 |
| Число лучей III*D* . . . . . Number of rays in III*D* | 19 —22 | 18 —22 |
| Число лучей I*A* . . . . . Number of rays in I*A* | 30 —35 | 28 —32 |
| Число лучей II*A* . . . . . Number of rays in II*A* | 21 —23 | 19 —22 |
| Число жаберных тычинок . . . . . Number of gill rakers | 21 —22 | 20 —23 |

или, реже, едва развит. Едва заметный, рудиментарный усик имели 5 (2 экземпляра 92 и 107 мм длиной из Немецкого моря, 1 экземпляр длиной 202 мм с Мурманского побережья и 2 экземпляра 207 и 236 мм длиной из Адриатического моря) из 13 просмотренных экземпляров *Gadus merlangus*. По другим признакам эти экземпляры типичные *Gadus merlangus*. Экземпляры *Gadus euxinus*, констатированные некоторыми авторами (2) в Адриатическом море, несомненно являются *Gadus merlangus* с рудиментарным усиком, подобные нашим экземплярам этих мест, из Немецкого моря и с Мурманского побережья.

Кроме постоянного наличия развитого усика, у *Gadus euxinus* более длинные грудные и брюшные плавники, более короткое основание II *D* и I *A* и меньшее количество лучей в них, более длинное основание и большее количество лучей в I *D*, более короткий и более низкий хвостовой стебель. Существенных отличий в других признаках нет (см. таблицу).

Таким образом, имея обособленный ареал распространения и указанные выше отличия от *Gadus merlangus*, черноморский мерланг должен считаться подвидом последнего. Наиболее существенные различия между ними таковы:

1. Усика на подбородке нет, а если есть, то едва заметный. Грудные плавники 13.8—15.6% длины тела, брюшные плавники — 7.4—8.6% той же длины. Атлантический океан, Средиземное и Адриатическое море . . . . . *Gadus merlangus.*

2. На подбородке есть всегда хорошо заметный усик. Грудной плавник 15.4—18.2% длины тела, брюшной плавник — 8.1—11.3% той же длины. Черное море . . . . . *Gadus merlangus euxinus.*

## Gadus merlangus Linné

*Gadus merlangus* Linné. Syst. nat., éd. X, 1758, p. 253 (habitat in Oceano Europeo).

I *D* 12—15, II *D* 18—25, III *D* 19—22, I *A* 30—35, II *A* 21—23, sp. br. 21—22. Усика на подбородке обычно нет, а если есть, то едва заметный, рудиментарный. Верхняя челюсть выдается над нижней. Основание

Фиг. 1. *Gadus merlangus* L. Екатерининская гавань, Мурман. Длина 252 мм.
Fig. 1. *Gadus merlangus* L. Ekaterininskaya Gavan, Murman. Length 252 mm.

I *A* длинное, больше половины длины антенального расстояния. Начало I *A* под серединой I *D* или немного далее. Боковая линия со слабым изгибом под началом II *D*. Спинные плавники разделены небольшими промежут-

Фиг. 2. *Gadus merlangus euxinus* Nordmann. Батум, в гавани. Длина 168 мм.
Fig. 2. *Gadus merlangus euxinus* Nordmann. Batum, in the barbour. Length 168 mm.

ками, анальные плавники тесно соприкасаются. У основания грудного плавника сверху черное пятно. Хвостовой плавник почти без выемки. Чешуя мелкая. На верхней и нижней челюстях по одному ряду острых, хорошо развитых зубов. Кроме того, внутри от этого ряда на верхней челюсти и снаружи на нижней имеются в беспорядке разбросанные более мелкие зубы. Мелкие зубы на головке сошника, из них крайний с каждой стороны развит несколько больше.

Длина обычно 20—35 см, изредка попадаются экземпляры до 55 и более см длины.

Берега Европы от Мурмана до Испании, Средиземное и Адриатическое моря. Изредка встречается в западной части Балтийского моря (до о. Готланд).

### Gadus merlangus euxinus Nordmann

*Gadus euxinus* Nordmann. Faune Pontique, 1830, p. 526 (partout le long des côtes de la Mer Noire).

I *D* 14—17, II *D* 16—19, III *D* 18—22, I *A* 28—32, II *A* 19—22. sp. br. 20—23. На подбородке всегда имеется хорошо заметный усик. Более длинные грудные и брюшные плавники, основание II *D* и I *A* более короткое, основание I *D* более длинное, более короткий и низкий хвостовой стебль, чем у *Gadus merlangus*; в остальном подобна ему.

Обычные размеры 15—20 см, хотя иногда и встречаются отдельные экземпляры длиной свыше 50 см.

Черное море.

Зоологический институт.
Академия Наук СССР.
Ленинград.

Поступило
15 XI 1934.

---

*ZOOLOGY*

## ON THE BLACK SEA SUBSPECIES OF THE WHITING (*GADUS MERLANGUS EUXINUS*)

By A. SVETOVIDOV

(*Communicated by S. Zernov, Member of the Academy, 15. XI. 1934*)

The Black Sea fauna, except the native inhabitants which represent the „Pontic relics", consists, as is well-known, to a considerable degree of the later Mediterranean newcomers which penetrated into the Black Sea after the Bosphorus had formed. As shown by recent investigations (1), some of the Mediterranean fishes have formed in the Black Sea independent subspecies (*Engraulis encrasicholus ponticus* Alexandrov, *E. encrasicholus maeoticus* Pusanov, 2 nationes of *Mullus barbatus ponticus* Essipov). The systematic position of the Black Sea whiting (*Gadus euxinus* Nordmann) was for a long time unknown: it was undecided whether it should be considered as a species or whether it is identical with the nearly allied *Gadus merlangus*. In this paper it is shown that this species is one of those Mediterranean emigrants that developed in the Black Sea into a special subspecies. Some authors (2), considering *Gadus euxinus* to be a separate species, record its presence, not only in the Black Sea, but also in the Adriatic. Other authors (3) do not find any differences between *Gadus euxinus* and nearly allied *Gadus merlangus* and, therefore, refer it to the latter species. D'Ancona (3) has lately suggested the identity of *Gadus euxinus* and *Gadus merlangus*. But an examination of the 13 specimens of *Gadus merlangus* and of the large number of *Gadus euxinus* preserved in the Zoological Institute of the Academy of Sciences of the USSR and in the Moscow Institute of Fisheries warranted the statement that *Gadus euxinus* is neither a separate species nor identical with *Gadus merlangus*. It is a subspecies of *Gadus merlangus* L. inhabiting the Black Sea.

*Gadus euxinus* has always a well-developed barbel below the chin (in specimens of 120 to 180 mm long the length of barbel attains 2.3 to 3.2 mm). In *Gadus merlangus* the barbel below the chin is usually absent

or, if sometimes present, is rudimentary. A very short rudimentary barbel was found in 5 of the 13 specimens of *Gadus merlangus* (namely, in 2 specimens 92 and 107 mm long from the North Sea, in one specimen 202 mm long from the Murman coast, and in 2 specimens 207 and 236 mm long from the Adriatic). As regards other characters, these specimens are typical *G. merlangus*. Specimens of *Gadus euxinus* described by some authors from the Adriatic are undoubtedly *Gadus merlangus* with a rudimentary barbel similar to our specimens from this sea, from the North Sea, and the Murman coast.

Moreover, *Gadus euxinus* has longer pectoral and ventral fins, shorter bases and a smaller number of rays in the second dorsal, and the first anal fins, a longer base and a larger number of rays in the first dorsal fin, a shorter and less deep caudal peduncle. No essential differences are to be found as regards other characters (see the table, p. 422—423).

The most essential differences of *Gadus merlangus* and *Gadus merlangus euxinus* are:

1. Barbel below the chin absent or, if sometimes present, very short. Pectoral fins from 13.8 to 15.6% of the body length, ventral fins from 7.4 to 8.6% of the same. Atlantic, Mediterranean, Adriatic . . . . . *Gadus merlangus*

2. A well-developed barbel below the chin. Pectoral fin from 15.4 to 18.2% of body length, ventral fins from 8.1 to 11.3% of the same. Black Sea . . . . . *Gadus merlangus euxinus* Nordm.

## **Gadus merlangus** Linné

*Gadus merlangus* Linné. Syst. nat., éd. X, 1758, p. 252 (habitat in Oceano Europeo).

I *D* 12—15, II *D* 18—25, III *D* 19—22, I *A* 30—35, II *A* 21—23, sp. br. 21—22. No barbel below the chin or, if sometimes present, scarcely developed, rudimentary. Upper jaw projecting beyond the lower. Base of first anal fin long, more than half of the distance from its beginning to the tip of the snout. Lateral line slightly curved under the beginning of the second dorsal. Dorsal fins with small interspaces, both anal fins are in contact. A black blotch at the base of the pectoral fin. Caudal fin nearly straight. A series of pointed well-developed teeth in the upper and lower jaws. Irregular rows of smaller and finer teeth in the upper jaw within the row of the large teeth, in the lower jaw outside it. Minute teeth on the head of vomer, both outermost ones somewhat better developed.

Length of body usually 20 to 35 cm, rarely reaches up to 55 cm. Atlantic coasts of Europe from the Murman coasts to Spain, Mediterranean and Adriatic. Rare in the western part of the Baltic Sea (as far as Gothland).

## **Gadus merlangus euxinus** Nordmann

*Gadus euxinus* Nordmann. Faune Pontique, 1840, p. 256 (partout le long des côtes de la Mer Noire).

I *D* 14—17, II *D* 16—19, III *D* 18—22, I *A* 28—32, II *A* 19—22, sp. br. 20—23. A well-developed barbel below the chin. Longer pectoral and ventral fins, bases of the second dorsal and first anal fins shorter, base of the first dorsal fin longer, caudal peduncle shorter and less deep than in the preceding. As regards other characters, similar to *Gadus merlangus*.

Length usually 15—10 cm, sometimes up to 50 cm. Black Sea.

Zoological Institute,
Academy of Sciences of the USSR.

Received
15. XI. 1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

[1] А. Александров. Тр. Керченской научной рыбохоз. ст., I, вып 2—3, 1927, стр. 37. A. Alexandrov. Rep. Sci. Stat. of Fisheries in Kertch, I, № 2—3, 1927, p. 37. — И. Пузанов. Тр. Крымск. научно-исслед. инст., I, 1926, стр. 87. I. Pusanov. Trans. Sci. Inst. Crimea., I, 1926, p. 87. — В. Есипов Тр. Керченской научной рыбохоз. ст., I, вып. 2—3, 1927, стр. 101. V. Essipov. Rep. Sci. Stat. of Fisheries in Kertch, I, № 2—3, 1927, p. 101. [2] A. Ninni. Atti Soc. Ital. Sci. Nat., XXIII, 1880, p. 75. — E. Graeffe. Arb. zool. Inst. Univers. Wien u. zool. Stat. Triest, VII, 1880, p. 10. [3] F. Steindachner. Sitzber. Akad. Wiss. Wien, LVII, 1868, S. 703.—U. D'Ancona. Arch. Zool. Italiano, XV, 1930, p. 291.

---

*ЗООЛОГИЯ*

**А. Н. СВЕТОВИДОВ**

# ВТОРОЙ ВИД ТРЕСКИ ИЗ РОДА *BOREOGADUS* (*BOREOGADUS AGILIS* REINHARDT)

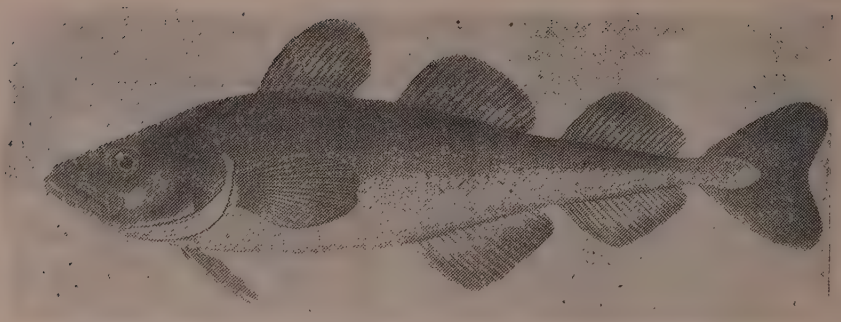
(*Представлено академиком С. А. Зерновым 21 XI 1934*)

Среди представителей сем. *Gadidae*, хранящихся в коллекциях Зоологического института Академии Наук СССР, имеется 3 экземпляра небольших тресок, доставленных с берегов Гренландии в 1842 г. И. Рейнгардтом: 2 экз. (№ 1947) под именем *Gadus agilis* Reinhardt и 1 экз. (№ 1950) под именем *Gadus ogak* Reinhardt. Обладая в целом ряде признаков сходством с *Boreogadus saida* (Lep.), эти экземпляры вместе с тем имеют целый ряд существенных отличий, на основании которых их следует отнести к самостоятельному виду, описание которого и дается ниже.

## Boreogadus agilis (Reinhardt)

*Gadus agilis* Reinhardt. Danske Vidensk. Selsk. Afhandl., VII, 1838. p. 126. I *D* 13—14, II *D* 16, III *D* 19—20, I *A* 18—19, II *A* 19—22, r. br. 6—7, sp. br. 40—42.

Один ряд мелких, широко расставленных зубов на сошнике и нижней челюсти. На верхней челюсти зубы спереди в 2 ряда, а на остальном протяжении в один ряд. На небных костях зубов нет. Нижняя челюсть выдается вперед. Непарные плавники широко расставлены. Боковая линия до начала II *D* расположена в виде дуги выше продольной оси тела, а затем спускается, под задней половиной II *D* делает волнообразный изгиб книзу и от начала основания III *D* тянется посредине тела. Анальное отверстие под началом II *D*. Хвостовой плавник выемчатый, закругленный. На подбородке небольшой, но хорошо заметный усик. Тело кзади утончается не сильно, а слегка. Чешуя мелкая. Мелких черных точек на боках тела, на голове и на плавниках нет. На теле редкие и мелкие, твердые бугорки.



Фиг. 1. *Boreogadus agilis* (Reinhardt), № 1950. Гренландия. Длина 370 мм.

Фиг. 2. *Boreogadus saida* (Lepechin). Р. Сибирчи, в 5 км выше устья. Длина 167 мм.

От близкой *Boreogadus saida* отличается следующими признаками:

| *Boreogadus agilis* | *Boreogadus saida* |
|---|---|
| 1. Тело более высокое, постепенно утончается кзади. | 1. Тело более низкое и сильно утончающееся кзади. |
| 2. Основание III *D* короче или равно основанию II *D*. | 2. Основание III *D* длиннее основания II *D*. |
| 3. Хвостовой плавник не сильно выемчатый, полулунный, закругленный. | 3. Хвостовой плавник сильно выемчатый, слабо закругленный. |
| 4. Усик небольшой, но хорошо заметен. | 4. Усик еще меньше, иногда едва заметен, более тонкий, волосовидный. |
| 5. Боковая линия с резким волнообразным изгибом под задней половиной II *D*. | 5. Боковая линия за началом основания II *D* тянется посредине тела*. |
| 6. Мелких черных точек на боках тела, на голове и на плавниках нет. | 6. На боках тела, на голове и на плавниках разбросаны мелкие черные точки. |

Кроме того, у *Boreogadus agilis* основания I и II *D* и I *A*, наибольшая и наименьшая высота тела несколько больше, а длина головы и продольный диаметр орбиты несколько меньше, чем у *Boreogadus saida* (см. таблицу).

* У *Boreogadus saida* боковая линия тянется не посредине тела и не прямая, как это принято (1) считать и изображать, а с изгибом под началом I *D* и до начала II *D* она расположена выше середины тела.

Сравнение систематических признаков *Boreogadus agilis* и *Boreogadus saida*

Comparison of the differential characters of *Boreogadus agilis* and *Boreogadus saida*

| | *B. agilis* | | | *B. saida* | |
|---|---|---|---|---|---|
| | № 1950 | № 1947 a | № 1947 b | Пределы колебаний Range of variations | Среднее Mean values |
| Длина тела общая в мм . . . . . Length of body in mm | 370 | 201 | 186 | 90—320 | 122.3 |
| Длина тела до *C* . . . . . Length of body to base of *C* | 339 | 184 | 171 | — | — |
| В % общей длины тела In % of body length | | | | | |
| Длина тела до I *D* . . . . . Length of body to base of I *D* | 28.5 | 27.4 | 25.8 | 26.5—31.5 | 28.6 |
| Длина тела до I *A* . . . . . Distance from tip of snout to base of I *A* | 47.1 | 44.4 | 42.7 | 41.5—49.5 | 45.6 |
| Длина *P*—I *A* . . . . . Distance between *P* and base of I *A* | 26.2 | 23.4 | 21.8 | 16.5—23.5 | 19.9 |
| Длина *V*—I *A* . . . . . Distance between *V* and base of I *A* | 29.1 | 23.6 | 23.9 | 16.5—24.5 | 20.9 |
| Длина *P* . . . . . Length of pectoral fin | 17.8 | 17.4 | 18.0 | 15.5—20.5 | 18.0 |
| Длина *V* . . . . . Length of ventral fin | 12.9 | 11.9 | 11.6 | 9.5—13.5 | 11.8 |
| Длина основания I *D* . . . . . Base of I *D* | 13.1 | 13.6 | 12.3 | 7.5—12.5 | 10.6 |
| Длина основания II *D* . . . . . Base of II *D* | 17.6 | 16.9 | 17.1 | 11.5—16.5 | 13.6 |
| Длина основания III *D* . . . . Base of III *D* | 15.2 | 16.9 | 16.6 | 13.5—17.5 | 15.8 |
| Длина основания I *A* . . . . . Base of I *A* | 18.0 | 18.1 | 18.0 | 12.5—18.5 | 15.4 |
| Длина основания II *A* . . . . . Base of II *A* | 16.7 | 17.2 | 15.3 | 13.5—18.5 | 15.7 |
| Высота I *D* . . . . . Depth of I *D* | 10.5 | 12.4 | 12.9 | 9.5—14.5 | 11.7 |
| Высота I *A* . . . . . Depth of I *A* | 10.2 | 10.0 | 10.9 | 8.0—11.0 | 9.4 |
| Длина хвостового стебля . . . . Length of caudal peduncle | 10.8 | 10.5 | 12.0 | 9.5—13.5 | 11.4 |
| Высота тела наибольшая . . . . Depth of body | — | 19.6 | 18.7 | 11.5—17.5 | 15.0 |

*(Продолжение)*

| | *B. agilis* | | | *B. saida* | |
|---|---|---|---|---|---|
| | № 1950 | № 1947 a | № 1947 b | Пределы колебаний Range of variations | Среднее Mean values |
| Высота тела наименьшая . . . . Depth of caudal peduncle | 3.2 | 3.7 | 3.2 | 2.5— 3.5 | 2.9 |
| Длина головы . . . . . Length of head | 21.8 | 21.3 | 20.7 | 22.5—26.5 | 24.7 |
| В % длины головы In % of head length | | | | | |
| Длина рыла . . . . . Length of snout | 30.6 | 30.2 | 27.3 | 26.5—34.5 | 29.5 |
| Диаметр глаза прод. . . . . Longitudinal diametre of eye | 22.9 | 25.6 | 27.3 | 25.5—32.5 | 28.8 |
| Длина верхней челюсти . . . . . Length of upper jaw | 43.5 | 43.6 | 45.0 | 37.5—44.5 | 41.5 |
| Длина нижней челюсти . . . . Length of lower jaw | 54.5 | 56.9 | 57.4 | 52.3—55.1 | 42.8 |
| Ширина лба . . . . . Interorbital space | 22.9 | 22.2 | 23.4 | 20.5—29.5 | 24.4 |
| Число лучей I *D* . . . . . Number of rays in I *D* | 13 | 14 | 13 | 11 —15 | 12.8 |
| Число лучей II *D* . . . . . Number of rays in II *D* | 16 | 16 | 16 | 12 —17 | 14.7 |
| Число лучей III *D* . . . . . Number of rays in III *D* | 20 | 19 | 20 | 17 —23 | 20.1 |
| Число лучей I *A* . . . . . Number of rays in I *A* | 18 | 19 | 18 | 14 —20 | 17.0 |
| Число лучей II *A* . . . . . Number of rays in II *A* | 22 | 20 | 19 | 18 —24 | 20.9 |
| Число жаберных тычинок . . . Number of gill rakers | 40 | 42 | 41 | 37 —46 | 41.4 |

Достигает больших размеров, чем *Boreogadus saida*: наибольший исследованный мною экземпляр *Boreogadus agilis* имел в длину 370 мм, *Boreogadus saida* — 320 мм.

Распространение: северные заливы Гренландии.

Сравнивая сопоставляемые выше отличительные признаки *Boreogadus agilis* и *Boreogadus saida* с довольно общим (верхняя челюсть короче нижней, усик короткий и волосовидный, хвостовой плавник не углом, а дугообразный) диагнозом Рейнгардта (2) *Gadus agilis* Reinh., относимой в настоящее время к *Boreogadus saida*, можно установить, что диагноз этот почти в одинаковой мере приложим и к *Boreogadus saida* и к *Boreogadus agilis* и, повидимому, составлен по экземплярам, относящимся к обоим

этим видам*. Поэтому за описываемым видом следует сохранить название, данное ему Рейнгардтом, тем более что экземпляры, на основании которых дается описание, доставлены в Зоологический институт Рейнгардтом.

Описанные ранее с берегов Гренландии *Merlangus polaris* Sabine (3) с глубоковыемчатым (вильчатым) хвостовым плавником и *Gadus fabricii* Richardson (4), имеющая черные точки на боках тела, чего нет у *Boreogadus agilis*, должны быть отнесены к *Boreogadus saida*.

Зоологический институт.
Академия Наук СССР. Ленинград.

Поступило
21 XI 1934.

---

*ZOOLOGY*

## A SECOND SPECIES OF COD OF THE GENUS *BOREOGADUS* (*BOREOGADUS AGILIS* REINHARDT)

By A. SVETOVIDOV

(*Communicated by S. Zernov, Member of the Academy, 21. XI. 1934*)

Among the specimens of the cod family preserved in the collections of the Zoological Institute of the Academy of Sciences, USSR, there are three small cod fishes presented by J. Reinhardt in 1842 from the coasts of Greenland: 2 specimens (№ 1947) were formerly identified as *Gadus agilis* Reinhardt and 1 specimen (№ 1950) as *Gadus ogak* Reinhardt. Being closely related to *Boreogadus saida* (Lep.), these specimens have a number of differences and, therefore, must be referred to a separate pecies, whose description is given below.

### Boreogadus agilis (Reinhardt)

*Gadus agilis* Reinhardt. Danske Vidensk. Selsk. Afhandl., VII, 1838, p. 126. I *D* 13—14, II *D* 16, III *D* 19—20, I *A* 18—19, II *A* 19—22, r. br. 6—7, sp. br. 40—42.

One series of minute, moderately spaced teeth on the vomer and in the lower jaw. Two series of teeth in front of upper jaw and one series in its posterior part. Palatines toothless. Lower jaw projecting beyond the upper. Unpaired fins with large interspaces. Lateral line before the second dorsal fin arranged above the median line of body in the form of an arc, then descends, and under the posterior part of second dorsal fin distinctly undulating. Vent under the origin of the second dorsal. Caudal lunate, rounded. A small but conspicuous barbel below the chin. Hind part of body sligthly attenuate. Scales minute. No minute black spots on sides of body, head, and fins. Widely spaced minute and hard tubercles on the body.

* Проф. А. Иенсен, сравнив по моей просьбе 7 типов *Gadus agilis* Рейнгардта, нашел, что они не отличаются от *B. saida* При этом он отмечает, что отличительные признаки, указываемые мною для данных видов, не все обнаружены им на экземплярах Рейнгардта и, по его мнению, наблюдаются вперемежку у отдельных экземпляров *B. saida*. К сожалению, мною не было обращено внимание проф. Иенсена на найденный мною позднее резкий отличительный признак *B. agilis* — форму боковой линии. Если этот важный отличительный признак не будет обнаружен на экземплярах Рейнгардта, то описываемою мною экземпляры (№№ 1947 и 1950) следует считать новым видом.

From the nearly allied *Boreogadus saida* differs in the following characters:

| *Boreogadus agilis* | *Boreogadus saida* |
|---|---|
| 1. Body deep, gradually attenuate. | 1. Body less deep and considerably attenuate. |
| 2. Base of third dorsal fin shorter or equal to the base of the second dorsal. | 2. Base of the third dorsal longer than base of the second dorsal. |
| 3. Caudal lunate, rounded. | 3. Caudal deeply forked, slightly rounded. |
| 4. Barbel small, but well visible. | 4. Barbel minute, villiform, sometimes scarcely visible. |
| 5. Lateral line undulate under the posterior part of the second dorsal fin. | 5. Lateral line without a wavelike bend under the posterior part of the second dorsal fin. |
| 6. No minute black spots on sides of body, head, and fins. | 6. Minute black spots on sides of body, head, and fins. |

Moreover, in *Boreogadus agilis* the bases of the first and second dorsal and of the first anal fins, the depth of body, and that of caudal peduncle are somewhat larger, and the head and the longitudinal diameter of orbit are somewhat smaller than in *Boreogadus saida* (see the table, pp. 429—430).

The first named species attains a larger size than *Boreogadus saida*. The largest examined specimen of *Boreogadus saida* was 320 mm long, *Boreogadus agilis*, 370 mm.

Distribution: northern bays of Greenland.

Comparing the above tabulated specific characters of *Boreogadus agilis* and *Boreogadus saida* with Reinhardt's (2) general description of *Gadus agilis* Reinh. [upper jaw shorter than the lower one, barbel short and villiform, caudal not forked, but lunate (1)], it is evident that his diagnosis may be referred in the same way to both species, *Boreogadus saida* and *Boreogadus agilis*. It is obviously based on specimens belonging to both these species.* Therefore, our specimens, presented by Reinhardt himself to our Museum in 1842, must be referred to *Boreogadus agilis* (Reinh.).

*Merlangus polaris* Sabine (3) with a deeply forked caudal and *Gadus fabricii* Richardson (4), both from the shores of Greenland, the last with black spots on sides of the body (absent in *Boreogadus agilis*), must be referred to *Boreogadus saida*.

Zoological Institute,
Academy of Sciences of the USSR.

Received
21.XI.1934.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА — REFERENCES

1 F. Smitt. Scand. Fishes, I, 1893, Fig. 120. 2 J. Reinhardt. Danske Vidensk. Selsk. Afhandl., VII, 1838, p. 126. 3 E. Sabine. Suppl. Parry's Voy., 1824, p. CCXII. 4 J. Richardson. Fauna Bor.-Americ., III, 1836, p. 245.

* Dr. A. Jensen, having compared at my request 7 Reinhardt's type specimens of *Gadus agilis*, stated that they did not differ from *B. saida*. He notes that the distinguishing characters of both these species are not all present in Reinhardt's original specimens, and in his opinion they seem to occur promiscuously in the different specimens of *B. saida*. Unfortunately, I did not call Dr. Jensen's attention to the shape of the lateral line of *B. agilis*. If this important differential character is not discovered in Reinhardt's specimens, the specimens (№№ 1947 and 1950) described by me here should be referred to a new species.